Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1975

УДК 538.56

В. Д. ГУСЕВ, А. ХУРИ

РЕШЕНИЕ ЛУЧЕВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ РАССЕИВАЮЩЕЙ СФЕРИЧЕСКИ-СЛОИСТОЙ СРЕДЫ МЕТОДОМ ВОЗМУЩЕНИЙ

Для сферически-слоистой линейной модели ионосферы методом возмущений решено лучевое уравнение до второго приближения. На основании этого решения для изометрических гауссовских случайных неоднородностей рассчитаны флуктуации углов прихода волны, среднее направление ее выхода из ионосферы, а также проанализированы полученные результаты в сравнении с результатами для плоско-слоистой среды.

При общем решении задачи о флуктуациях направления распространения радиоволн в ионосфере необходимо учитывать сферичность Земли. В литературе [1—5] достаточно освещено решение лучевого уравнения методом возмущений для однородной в среднем и неоднородной плоскослоистой среды. Однако вопрос об учете сферичности до сих пор оставался не рассмотренным. Можно ожидать, что всевозможные величины, характеризующие флуктуации направления распространения радиоволн над плоской землей, претерпят изменения при учете ее сферичности.

В данной работе методом возмущений до второго приближения решено лучевое уравнение для сферически-слоистой линейной модели ионосферы. На основании этого решения рассчитаны флуктуации углов прихода, среднее направление выхода волны из ионосферы при изотропном рассеянии. Полученные результаты сравниваются с результатами изотропного рассеяния в плоскослоистой среде [5].

Рассмотрим распространение скалярных волн в изотропной среде с регулярной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0(r)$, линейно-убывающей с высотой

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_0 = 1 - \frac{r - r_0}{r_1 - r_0} = 1 - \frac{r - r_0}{z_0}, \tag{1}$$

где r_0 — расстояние от центра земли до начала слоя, $r_1 = r_0 + z_0$, z_0 — полутолщина слоя, r — расстояние от центра земли до текущей точки траектории луча.

Флуктуирующая часть диэлектрической проницаемости ε_1 удовлетворяет условию малости ($\bar{\varepsilon}_1 = 0$)

$$\frac{\sqrt{\bar{\varepsilon}_1^2(r, \theta, \varphi)}}{\varepsilon_0(r)} = \nu \ll 1 \tag{2}$$

и обладает изотропной функцией корреляции

$$B_\varepsilon(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = \bar{\varepsilon}_1^2 \exp\left\{-\frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|^2}{a^2}\right\}, \tag{3}$$

причем рассматривается модель рассеивающей среды, для которой $\bar{\varepsilon}_1^2 = \text{const}$.

Лучевое уравнение для сферической слоистой ионосферы в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{d}{ds}[\mathbf{r}n(l_r\mathbf{i}_r + l_\theta\mathbf{i}_\theta + l_\varphi\mathbf{i}_\varphi)] = \left[\frac{r}{r}\frac{\partial n\,\mathbf{i}_\theta}{\partial\theta}\right] + \left[\frac{r}{r}\frac{\partial n\,\mathbf{i}_\varphi}{\sin\theta\partial\varphi}\right], \tag{4}$$

где $n = \sqrt{\varepsilon}$ показатель преломления, $\mathbf{l} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ единичный лучевой вектор, $\mathbf{i}_r$, $\mathbf{i}_\theta$, $\mathbf{i}_\varphi$ — локальные базисные векторы, которые могут быть выражены через геоцентрические координаты r, θ, φ и орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ прямоугольной системы координат, отнесенной к ценру Земли. Если обозначить через $\theta^* = \theta_0^* + \theta_1^* + \theta_2^* + \ldots$ и $\varphi^* = \varphi_1^* + \varphi_2^* + \ldots$ (где индексы при θ^* и φ^* означают их нулевое, первое и второе приближения) координаты единичного вектора $\mathbf{l}$ в системе локального базиса, то каждая компонента вектора $\mathbf{l}$ в этой системе будет иметь вид

$$\begin{aligned} l_r &= \frac{dr}{ds} = \cos\theta^* \\ l_\theta &= r\frac{d\theta}{ds} = \sin\theta^*\cos\varphi^*. \\ l_\varphi &= \frac{r\sin\theta d\varphi}{ds} = \sin\theta^*\sin\varphi^*. \end{aligned} \tag{5}$$

Записывая тождества $\frac{d}{ds} = (\mathbf{l}\nabla)$ в сферических координатах и разделяя векторное уравнение [4] по компонентам, соответствующим ортам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, получим систему из двух дифференциальных уравнений, позволяющих нам найти l_θ и l_φ и соответственно продольное и поперечное смещения луча. Эти два уравнения имеют вид:

$$\frac{d}{ds}(rnl_\theta) - nl_\varphi^2 \operatorname{ctg}\theta = \frac{\partial n}{\partial\theta}, \tag{6}$$

$$\frac{d}{ds}(rnl_\varphi) + nl_\theta l_\varphi \cos\theta = \frac{\partial n}{\partial\varphi}. \tag{7}$$

Подставляя (5) в (6) и (7), получим два уравнения, представляющих собой эквивалентную форму лучевого уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta^*}{ds} &= (\mathbf{i}_n\nabla \ln n) - \frac{\sin\theta^*}{r}, \\ \sin\theta^*\frac{d\varphi^*}{ds} &= (\mathbf{i}_b\nabla \ln n) - \frac{\sin^2\theta^*\sin\varphi^*}{r}\operatorname{ctg}\theta, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\mathbf{i}_n$, $\mathbf{i}_b$ — единичные векторы главной нормали и бинормали траектории луча. Таким образом, изменение углов θ^* и φ^* определяется не только проекцией вектора $\nabla \ln n$ на главную нормаль и бинормаль траектории луча как в случае плоскослоистой ионосферы [5], но и членами $\sin\theta^*/r$ и $\frac{\sin^2\theta^* \sin\varphi^*}{r} \operatorname{ctg}\theta$, учитывающими влияние сферичности земли. Легко видеть, что при $r_0 \to \infty$ система уравнений (8) переходит в соответственную систему, полученную ранее [5].

Систему уравнений (8) решаем методом последовательных приближений аналогично тому, как это сделано в [5]. Для этого $\nabla \ln n$, θ^*, φ^* представляются в виде рядов по степеням малого параметра ν. Ограничиваемся нахождением первого и второго приближений θ_1^*, φ_1^*, θ_2^*, φ_2^*. Используя связь траектории распространения с невозмущенной траекторией s_0, можно записать

$$\frac{d}{ds} = \frac{d}{ds_0} - \frac{\theta_1^{*2} + \varphi_1^{*2} \sin^2\theta_0^*}{2} \frac{d}{ds_0}. \tag{9}$$

Подстановка (9) в (8) позволяет получить уравнение для θ_0^*, θ_1^*, θ_2^*, φ_1^*, φ_2^*.

Уравнение для нулевого приближения θ_0^* дает классический закон Снеллиуса с учётом сферичности земли:

$$\sqrt{\varepsilon_0}\, r \sin\theta_0^* = r_0 \sin\theta_\infty^* = \mathrm{const}, \tag{10}$$

где θ_∞^* — угол падения волны на слой. Уравнения первого приближения для θ_1^* и φ_1^* при нулевых граничных условиях $\theta_1^*|_{s_0=0} = \varphi_1^*|_{s_0=0} = 0$ дают:

$$\theta_1^* = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0}\, r} \int_0^{s_0} \sqrt{\varepsilon_0} \left\{\cos\theta_0^* \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right) - r\sin\theta_0^* \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)\right\} ds_0,$$

$$\varphi_1^* = \frac{1}{2} \int_0^{s_0} \frac{1}{\sin\theta_0^* r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right) ds_0. \tag{11}$$

Из (11) следует, что средняя лучевая траектория в первом приближении совпадает с невозмущенной так же, как при рассеянии в плоскослоистой среде. Аналогично, можно рассчитать уравнение второго приближения $\bar{\theta}_2^*$, но из-за громоздкости этого выражения оно не приводится. Можно только отметить, что для выбранной модели $\bar{\theta}_2^*$ отлично от нуля и имеет порядок $\bar{\theta}_2$ для плоскослоистой среды $\bar{\varphi}_2^* = \bar{\varphi}_2 = 0$ [5].

Интегрирование в (11) осуществляется вдоль невозмущенной траектории s_0, элемент длины которой на основании (5) равен

$$ds_0 = \frac{dr}{\cos\theta_0^*} = \frac{r\,d\theta}{\sin\theta_0^*}. \tag{12}$$

Для вычисления вторых моментов флуктуаций углов θ^* и φ^* необходимо прежде всего определить траекторию невозмущенного луча в сферических координатах $\theta = f(r)$, которая лежит в плоскости большого круга. Из (10) и (12) следует, что

$$\theta(r) = r_0 \sin\theta_{00}^* \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r\sqrt{\varepsilon_0 r^2 - r_0^2 \sin^2\theta_0^*}} \tag{13}$$

Для линейного слоя (1) уравнение траектории (13) можно представить в виде

$$\theta(r) = \sqrt{z_0}\, r_0 \sin\theta_{00}^{*} \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r\sqrt{(r_{от}-r)(r-r_2)(r-r_3)}}, \tag{14}$$

где $\left(\text{при условии } \frac{z_0}{r_0} \ll 1\right)$

$$r_{от} \simeq r_1,$$

$$r_2 \simeq \sqrt{\frac{z_0}{r_1}}\, r_0 \sin\theta_{00}^{*}, \tag{15}$$

$$r_3 \simeq -\sqrt{\frac{z_0}{r_1}}\, r_0 \sin\theta_{00}^{*}.$$

Интеграл (14) выражается с помощью эллиптических интегралов третьего рода $\Pi(\varphi, \alpha, k)$ [6]:

$$\theta(r) = 2\sqrt{\frac{r_1 - r_0}{r_{от} - r_3}\,\frac{r_0}{r_{от}}}\,(\Pi(\varphi_0, \alpha, k) - \Pi(\varphi, \alpha, k)), \tag{16}$$

где $\varphi = \arcsin\sqrt{\frac{r_{от} - r}{r_{от} - r_2}}$, $\varphi_0 = \varphi(r = r_0)$,

$$\alpha = \frac{r_{от} - r_2}{r_{от}}, \quad k = \sqrt{\frac{r_{от} - r_2}{r_{от} - r_3}}.$$

Очевидно $\varphi(r) \leqslant \varphi_0 \ll 1$. В силу этого эллиптические интегралы в (16) могут быть разложены в ряд по малым аргументам. Ограничиваясь первым приближением, получим

$$\theta(r) = A\sqrt{r_{от} - r} + B,$$

где A и B — постоянные величины, или

$$r = m\theta^2 + n\theta + r_0, \tag{17}$$

где

$$m = -\frac{r_{от}^{2}(r_{от} - r_2)(r_{от} - r_3)}{4 z_0 r_0^2 \sin^2\theta_{00}^{*}}, \quad n = \frac{r_{от}\sqrt{(r_{от} - r_0)(r_{от} - r_2)(r_{от} - r_3)}}{\sqrt{z_0}\, r_0 \sin\theta_{00}^{*}}.$$

Из (17) видно, что отражение происходит при

$$\theta_{от} = \frac{2\sqrt{z_0(r_{от} - r_0)}\, r_0 \sin\theta_{00}^{*}}{r_{от}\sqrt{(r_{от} - r_2)(r_{от} - r_3)}}. \tag{18}$$

При выполнении условий $\frac{a}{r_0} \ll 1$ функцию корреляции (3) можно представить в следующем виде:

$$B_\varepsilon = \bar{\varepsilon}_1^2 \exp\left\{-\frac{\beta^2}{a^2}\left[(m\alpha + n)^2 + r_0^2\right]\right\}, \tag{19}$$

где $\alpha = \theta' + \theta''$, $\beta = \theta' - \theta''$.

Эти результаты позволяют практически вычислить любые угловые моменты. Опуская промежуточные выкладки, укажем на величину дисперсий полярного $\sigma^2_{\theta*}$ и азимутального $\sigma^2_{\varphi*}$ углов на выходе из ионосферы:

$$\sigma^2_{\theta*} = \sigma^2_\theta \left(1 + f\left(\theta^*_{00}; \frac{z_0}{r_0}\right)\right),$$
$$\sigma^2_{\varphi*} = \sigma^2_\varphi \left(1 + f\left(\theta^*_{00}, \frac{z_0}{r_0}\right)\right), \tag{20}$$

где

$$\sigma^2_\theta = 2\sqrt{\pi}\,\frac{z_0}{a}\,\bar{\varepsilon}_1^2 \ln \operatorname{ctg}\frac{\theta_{00}}{2}, \quad \sigma^2_\varphi = 2\sqrt{\pi}\,\frac{z_0\bar{\varepsilon}_1^2}{a\sin^2\theta_{00}} \ln \operatorname{ctg}\frac{\theta_{00}}{2} \text{ (см. [5])},$$

$$f\left(\theta^*_{00}, \frac{z_0}{r_1}\right) = \frac{1}{\ln \operatorname{ctg}\frac{\theta_{00}}{2}} \ln \left\{\frac{z_0}{r_0}(1+\cos^2\theta^*_{00})(1 + \right.$$
$$\left. + 2\cos\theta^*_{00})/(1+\cos\theta^*_{00})\cos\theta^*_{00}\right\}.$$

При вычислении (20) накладывается ограничение снизу на угол падения θ^*_{00}:

$$\sin^2\theta^*_{00} \gg \frac{a^2}{4z_0 z_{\text{от}} + \frac{z_0}{r_1}a^2}.$$

При $z_{\text{от}} \sim z_0 \sim 100$ км, $a \sim 1$ км: $\theta^*_{00} \geqslant 6° \div 8°$.

Степень отклонения дисперсий углов рассеяния сферически- и плоскослоистых сред определяется величиной

$$q = \frac{\sigma^2_{\theta*} - \sigma^2_\theta}{\sigma^2_\theta} = \frac{\sigma^2_{\varphi*} - \sigma^2_\varphi}{\sigma^2_\varphi} = \left(1 + \frac{4z}{r_0}\right) f\left(\theta^*_{00}, \frac{z_0}{r_0}\right). \tag{21}$$

Из (21) следует монотонное возрастание q при увеличении θ^*_∞, при $\theta^*_{00} = 10°$, $q \simeq 4\%$; при $\theta^*_{00} = 70°$, $q \simeq 15\%$, для $z_0 \sim 100$ км, $a \sim 1$ км (слой F_2) q меняется от 0,04 до 0,15. Для слоя E соответствующие значения оказываются на порядок меньше.

Таким образом, в некоторых условиях рассеяния в слое при скользящем относительно земли распространении учет сферичности ионосферы может оказать существенное влияние на величину флуктуаций углов рассеяния.

В заключение следует отметить, что предложенный метод учета сферичности ионосферного слоя может иметь практическое значение и в других случаях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., 1967.
2. Чернов Л. А. Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. М., 1958.
3. Альперт Л. Распространение электромагнитных волн и ионосфера. М., 1972.
4. Кравцов Ю. А., Фейзулин З. И. «Радиотехника и электроника», **16**, 1971.
5. Гусев В. Д., Мамутов Н. А., Хури А. «Радиотехника и электроника», **19**, 1974.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971, стр. 241.

Поступила в редакцию
6.7 1973 г.

Кафедра
волновых процессов