ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1975

УДК 517.9

П. С. ЛАНДА

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ НА АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Метод эквивалентной линеаризации дает возможность приближенно вычислить амплитуду автоколебаний в одномерной распределенной системе при условии одномодового режима генерации.

При исследовании автоколебательных систем и систем автоматического управления с сосредоточенными параметрами часто и успешно применяют метод эквивалентной линеаризации [1]. В свою очередь, для анализа полученной линеаризованной системы оказывается удобным использовать различные частотные методы, такие, например, как метод диаграмм регенерации Найквиста и Михайлова [1, 2], метод траекторий корней [3] и др.

Аналогом метода диаграмм регенерации Михайлова для распределенных систем является метод характеристического определителя [4]. Естественно возникает вопрос о возможности линеаризации распределенных автоколебательных систем и последующем применении метода характеристического определителя.

В настоящей работе излагается такая возможность для исследования автоколебаний в одномерной распределенной системе при условии одномодового режима генерации.

Пусть рассматриваемая система описывается уравнениями вида

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \left(a_{kj}(x) \frac{\partial y_j}{\partial t} + b_{kj}(x) u_j \right) = \mu f_k(u, x, t) \tag{1}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered} \left[\sum_{j=1}^{n} c_{kj} u_j + \mu \varphi_k(u, t)\right]_{x=0} = 0 \text{ при } k = 1, 2, \ldots, m, \\ \left[\sum_{j=1}^{n} c_{kj} u_j + \mu \varphi_k(u, t)\right]_{x=L} = 0 \text{ при } k = m+1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь u — совокупность всех переменных u_j, μ — малый параметр.

Предполагаем, что при $\mu=0$ система является автономной линейной консервативной и имеет периодические по времени решения.

Запишем общее решение такой системы в виде

$$u_j(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l [F_{jl}(x) e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.}]. \tag{3}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Здесь $F_{jl}(x)$ — собственные функции (моды) линейной системы, удовлетворяющие граничным условиям (2) при $\mu=0$, A_l — произвольные постоянные, зависящие от начальных условий и имеющие смысл амплитуд колебаний соответствующей моды, ω_l — собственные частоты.

Если спектр собственных частот системы не является эквидистантным и условия возбуждения автоколебаний выполняются лишь для одной из собственных частот, то в решении (3) можно оставить только один член

$$u_j(x, t) = A [F_j(x) e^{i\omega t} + \text{к. с.}] \tag{4}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Будем искать решение уравнений (1), близкое к «порождающему» решению (4). Чтобы найти решение в первом приближении по малому параметру, в правую часть уравнений (1) можно подставить решение (4) и линеаризовать функции f_k. Линеаризацию будем производить, исходя из критерия минимума среднеквадратичной ошибки. Составим линейную комбинацию функций $u_j(x, t)$:

$$\widetilde{f}_k \equiv \sum_{j=1}^{n} \lambda_{kj} u_j \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

и коэффициенты λ_{kj} подберем так, чтобы среднеквадратичное отклонение $\overline{\varepsilon_k^2} \equiv \overline{(f_k - \widetilde{f}_k)^2}$ было минимальным. Дифференцируя по λ_{kj} с учетом (5) и приравнивая производные нулю, получаем следующую систему уравнений для определения λ_{kj}:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{kj} \overline{u_j u_l} = \overline{f_k(u, x, t) u_l} \tag{6}$$

$$(l = 1, 2, \ldots, n; \ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Подставив в уравнения (6) выражения (4) и усредняя по времени, получим

$$A \sum_{j=1}^{n} \lambda_{kj} [F_j(x) F_l^*(x) + \text{к. с.}] = \overline{f_k [A(F(x) e^{i\omega t} + \text{к. с.}), x, t] [F_l(x) e^{i\omega t} + \text{к. с.}]} \tag{7}$$

$$(l = 1, 2, \ldots, n; \ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Из уравнений (7) определяем λ_{kj} как функции амплитуды A и координаты x.

Аналогично линеаризуем функции $\varphi_k(u, t)$, заменяя их линейной комбинацией

$$\widetilde{\varphi}_k(u, t)|_{x=0} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} u_j(0, t) \text{ при } k = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\widetilde{\varphi}_k(u, t)|_{x=L} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} u_j(L, t) \text{ при } k = m+1, \ldots, n. \tag{8}$$

Для коэффициентов α_{kj} получаем следующую систему уравнений:

$$A \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} [F_j(0) F_l^*(0) + \text{к. с.}] = \overline{\varphi_k [A(F(0) e^{i\omega t} + \text{к. с.}), t] [F_l(0) e^{i\omega t} + \text{к. с.}]}$$

$$(l = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, m),$$

$$A \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} [F_j(L) F_l^*(L) + \text{к. с.}] = \overline{\varphi_k [A(F(L) e^{i\omega t} + \text{к. с.}), t] [F_l(L) e^{i\omega t} + \text{к. с.}]}$$

$$(l = 1, 2, \ldots, n;\ k = m+1, \ldots, n). \tag{9}$$

Подставив в уравнения (1) и граничные условия (2) линеаризованные функции f_k и φ_k, получим линеаризованную систему уравнений

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \left\{ a_{kj}(x) \frac{\partial u_j}{\partial t} + [b_{kj}(x) - \mu\lambda_{kj}(x, A)] u_j \right\} = 0 \tag{10}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

с граничными условиями

$$\sum_{j=1}^{n} [c_{kj} + \mu\alpha_{kj}(A)] u_j(0, t) = 0 \text{ при } k = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} [c_{kj} + \mu\alpha_{kj}(A)] u_j(L, t) = 0 \text{ при } k = m+1, \ldots, n. \tag{11}$$

Чтобы определить амплитуду и частоту автоколебаний, нам нужно найти периодическое решение уравнений (10), удовлетворяющее граничным условиям (11). Такое решение можно найти, в частности, методом характеристического определителя [1], позволяющим свести решение краевой задачи на собственные значения к решению ряда задач типа Коши. Для объяснения существа этого метода удобно в уравнениях (10) перейти к новым переменным

$$v_k(x, t) = \sum_{j=1}^{n} [c_{kj} + \mu\alpha_{kj}(A)] u_j(x, t) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Для переменных v_k получим систему уравнений вида

$$\frac{\partial v_k}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \left[d_{kj}(x, A) \frac{\partial v_j}{\partial t} + e_{kj}(x, A) v_j \right] = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{13}$$

с граничными условиями

$$v_k(0, t) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$
$$v_k(L, t) = 0, \qquad k = m+1, \ldots, n. \tag{14}$$

Поскольку нас интересует периодическое решение системы уравнений (13), то можно положить

$$v_k(x, t) = y_k(x) e^{i\omega t}. \tag{15}$$

Для переменных $y_k(x)$ получаем уравнения

$$\frac{dy_k}{dx} + \sum_{j=1}^{n} [id_{kj}(x, A)\omega + e_{kj}(x, A)] y_j(x) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{16}$$

с граничными условиями

$$y_k(0) = 0 \text{ при } k = 1, 2, \ldots, m,$$
$$y_k(L) = 0 \text{ при } k = m+1, \ldots, n. \tag{17}$$

Уравнения (16) с граничными условиями (17) имеют нетривиальное решение лишь при определенных значениях ω и A, играющих роль собственных значений. Эти собственные значения могут быть найдены следующим образом. Предположим, что при фиксированных значениях ω и A нам известны $n-m$ частных решений системы уравнений (16), удовлетворяющих следующим граничным условиям при $x=0$:

$$y_{jk}(0) = \delta_{j-m,k}; \; j = 1, 2, \ldots, n; \; k = 1, 2, \ldots, n-m. \tag{18}$$

Здесь k — номер частного решения, δ_{jk} — символ Кронекера.

Составим из этих частных решений линейную комбинацию

$$y_j(x) = \sum_{k=1}^{n-m} C_k y_{jk}(x) \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{19}$$

и потребуем, чтобы все $y_j(x)$ удовлетворяли граничным условиям (17). Поскольку в силу специального выбора системы частных решений $y_{jk}(x)$ граничные условия при $x=0$ удовлетворяются при любых значениях постоянных C_k, то остается потребовать лишь удовлетворения граничных условий при $x=L$.

Подставляя (19) в (17), получим систему однородных уравнений для определения постоянных C_k:

$$\sum_{k=1}^{n-m} y_{jk}(L) C_k = 0 \quad (j = m+1, \ldots, n). \tag{20}$$

Коэффициентами в этой системе являются комплексные значения частных решений $y_{jk}(x)$ при $x=L$. Эти значения могут быть найдены либо аналитически, либо при помощи вычислительных машин.

Из условия равенства нулю комплексного детерминанта системы (20), составленного из комплексных коэффициентов $y_{jk}(L)$, можно определить A и ω. Уравнение

$$\det \| y_{jk}(L) \| = 0 \tag{21}$$
$$(j = m+1, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, n-m)$$

может удовлетворяться при ряде значений A и ω. Эти значения определяют амплитуды и частоты возможных периодических режимов в системе.

Форму автоколебаний в первом приближении по μ можно определить, подставив в уравнения (16) найденные значения A и ω и решив эти уравнения при начальных условиях [1]:

$$y_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$
$$y_{m+j}(0) = C_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n-m.$$

Постоянные C_j определяются из системы уравнений (20), причем одна из постоянных остается неопределенной. Ее можно определить из уравнений второго приближения по малому параметру. Для этого представим полученное в первом приближении решение в виде

$$u_j(x, t) = A[F_j^{(1)}(x) e^{i\omega t} + \text{к. с.}] \tag{22}$$

где A — новая неизвестная амплитуда автоколебаний, $F_j^{(1)}(x)$ — форма автоколебаний в первом приближении.

Подставляя (22) в уравнения (1), линеаризуя полученные уравнения по заданной форме решения и поступая аналогично предыдущему, можно найти амплитуду, частоту и форму автоколебаний во втором приближении по малому параметру.

В принципе таким способом можно получить стационарное решение уравнений (1) в любом приближении по малому параметру μ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блакьер О. Анализ нелинейных систем. М., 1969.
2. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. М.—Л., 1952.
3. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., 1964.
4. Ланда П. С., Пономарев Ю. В., Стрелков С. П. «Инженерный журнал», № 3, 186, 1967.

Поступила в редакцию
14.6 1973 г.

Кафедра
общей физики
для мехмата