

УДК 538.56:534—16

Г. И. ИВАНОВСКИ, М. И. КАГАНОВ

О РОЛИ ПОВЕРХНОСТИ В ТРАНСФОРМАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ЗВУКОВЫЕ

Теоретически изучается роль поверхности в трансформации электромагнитной энергии в звуковую в нормальных металлах в отсутствие постоянного магнитного поля.

Введение

Хотя трансформация электромагнитной энергии в звуковую исследовалась многократно, роль поверхности образца в трансформации ввиду некоторых сложностей математического характера изучена недостаточно.

При зеркальном отражении электронов от поверхности образца поверхностная сила равна нулю.

В работе [1] показано, что при диффузном отражении электронов от поверхности массивного металла возникает δ -образная поверхностная сила. Для упрощения в [1] постулируется возможность нечетного продолжения поля на область $z < 0$ (металл заполняет полупространство $z > 0$), а для связи между током и полем используются выражения, найденные без учета границ. Поверхностная сила при этом не равна нулю, что дает возможность учесть ее вклад в трансформацию¹.

В трансформации электромагнитной энергии в звуковую принимают участие электроны, падающие на поверхность под любыми углами [3, 4], благодаря чему коэффициент трансформации существенно зависит от характера рассеяния электронов границами образца [4].

В данной работе вычислен коэффициент трансформации массивным металлом. Граничное условие для функции распределения электронов соответствует диффузному отражению электронов от поверхности образца. Сделано сравнение с результатами, полученными ранее для случая зеркального отражения электронов.

Результаты этой и упомянутых выше работ позволяют причислить эффект трансформации к числу эффектов, чувствительных к способу отражения электронов от границы образца.

¹ В работе [2] содержится подробная библиография.

§ 1. Решение системы уравнений

Электромагнитная волна нормально падает на металлическую поверхность. Металл заполняет полупространство $z > 0$.

Система уравнений, описывающая взаимную связь электромагнитных и звуковых волн, имеет следующий вид [5]:

$$\frac{\partial \chi(z, \mathbf{v})}{\partial z} + \frac{v + i\omega}{v_z} \chi(z, \mathbf{v}) = \frac{eV_x}{v_z} E_x(z), \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 E_x(z)}{\partial z^2} - \frac{4\pi e}{c^2} \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \oint \frac{ds}{v} v_x \chi(z, \mathbf{v}) = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x(z)}{\partial z^2} + q^2 u_x(z) = \frac{1}{\rho s^2} \left[\frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \oint \frac{ds}{v} \Lambda_{xz} \frac{\partial \chi(z, \mathbf{v})}{\partial z} - \right. \\ \left. - im_0 \omega \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \oint \frac{ds}{v} v_x \chi(z, \mathbf{v}) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\chi \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}$ — неравновесная добавка к фермиевской функции распределения, $\Lambda_{ik} = \lambda_{jk} - \bar{\lambda}_{ik}$; $\lambda_{ik} u_{ik}$ — деформационная добавка к закону дисперсии электрона $\epsilon = \epsilon(\mathbf{p})$, черта означает среднее по поверхности Ферми, $u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$, \mathbf{u} — вектор смещения решетки, e — заряд, m_0 — масса свободного электрона, ρ — плотность металла, знак \oint обозначает интегрирование по поверхности Ферми $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$. Мы воспользовались тем, что $\chi, E, u \sim e^{i\omega t}$.

Запись системы (1)–(3) не учитывает обратного эффекта — трансформации звуковой энергии в электромагнитную. Это можно делать в массивном металле, поскольку обратный эффект не мал только в условиях резонансного возбуждения звука в тонких образцах [2].

Для решения системы (1)–(3) применим метод, использованный в [6].

Введем функцию $\psi(z, \mathbf{v})$:

$$\psi(z, \mathbf{v}) = \chi(z, \mathbf{v}) - \chi(z, -\mathbf{v}), \quad (4)$$

уравнение для которой согласно (1) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \psi(z, \mathbf{v})}{\partial z^2} - \left(\frac{v + i\omega}{v_z} \right)^2 \psi(z, \mathbf{v}) = - \frac{2eV_x}{v_z} \cdot \frac{v + i\omega}{v_z} E_x(z), \quad (5)$$

$\psi(z, \mathbf{v})$ удовлетворяет граничному условию

$$\left. \frac{\partial \psi(z, \mathbf{v})}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{v + i\omega}{v_z} [\text{sign } v_z \psi(0, \mathbf{v})], \quad (6)$$

Граничное условие для смещения \mathbf{u} получается из выражения для плотности потока импульса [5] и с помощью функции $\psi(z, \mathbf{v})$ записывается так:

$$\left. \frac{\partial u_x(z)}{\partial z} \right|_{z=0} + \frac{1}{\rho s^2} \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \oint_{(v_z > 0)} \frac{ds}{v} \Lambda_{xz} \psi(0, \mathbf{v}) = 0. \quad (7)$$

При записи (7) и в дальнейшем использовании симметрия тензора $\Lambda_{ik} [\Lambda_{xz}(v_z) = -\Lambda_{xz}(-v_z)]$. Систему уравнений (1)–(3), записанную в терминах функций $\psi(z, \mathbf{v})$, решаем методом Фурье. Для этого продолжим функции ψ, E и u на верхнюю полуплоскость четным образом.

Использование формулы трансформации Фурье явно вводит в уравнения для Фурье-компонентов функции ψ , E и u граничные значения производных этих функций при $z=0$.

Не выписывая промежуточных вычислений, мы приведем результат для Фурье-компонентов поля E^k и смещения u^k в виде интегральных уравнений:

$$\left[k^2 + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma(\omega, k) \right] E^k + 2E'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} L(\omega, k, r) E^r dr, \quad (8)$$

$$u^k = \frac{1}{q^2 - k^2} \frac{1}{\rho e s^2} \left\{ [-im_0 \omega \sigma(\omega, k) + \tilde{m} v \sigma_0 + \tilde{m}(v + i\omega) \sigma(\omega, k)] E^k + e \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega, k, r) E^r dr \right\}, \quad (9)$$

где

$$\sigma(\omega, k) = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \oint \frac{ds}{v} \frac{(v + i\omega) v_x^2}{(v + i\omega)^2 + (kv_z)^2}; \quad \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m^*}, \quad (10)$$

$$L(\omega, k, r) = i \frac{4\omega}{c^2} \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \oint_{(v_z > 0)} \frac{ds}{v} \frac{(v + i\omega)^2 v_x^2 v_z}{[(v + i\omega)^2 + (kv_z)^2][(v + i\omega)^2 + (rv_z)^2]}, \quad (11)$$

$$K(\omega, k, r) = \frac{1}{\Pi} \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \oint_{(v_z > 0)} \frac{ds}{v} \frac{im_0 \omega (v + i\omega)^2 v_x^2 v_z - k^2 (v + i\omega) v_x v_z^2 \Lambda_{xz}}{[(v + i\omega)^2 + (kv_z)^2][(v + i\omega)^2 + (rv_z)^2]}, \quad (12)$$

где n — плотность электронов, $\tau \equiv \frac{1}{v}$ — время свободного пробега, m^* — эффективная масса.

В общем виде решить уравнения (8), (9) не удастся. Мы приведем вычисления в условиях нормального и предельно аномального скин-эффекта.

§ 2. Коэффициент трансформации

Как обычно [1—4], трансформацию электромагнитной энергии в звуковую будем характеризовать коэффициентом трансформации Γ — отношением плотности потока звуковой энергии, к плотности потока электромагнитной энергии, падающей на металл:

$$\Gamma = \frac{\rho s \omega^2 |u|^2}{2Q_{эм}}. \quad (13)$$

Рассмотрим сначала трансформацию в условиях нормального скин-эффекта ($kl, rl, \omega\tau \ll 1$). Асимптотика выражений (10)—(12) в этом случае имеет вид¹

$$\sigma(\omega, k) \simeq \sigma_0 \left(1 - \frac{1}{5} k^2 l^2 \right), \quad (14)$$

$$L(\omega, k, r) \simeq i \frac{9}{4} \frac{\omega \sigma_0 l}{c^2}. \quad (15)$$

¹ Мы считаем при всех оценках закон дисперсии квадратичным

$\Lambda_{xz} = \tilde{m} v_x v_z, \quad \tilde{m} \sim m^* \approx m_0 \approx m.$

$$K(\omega, k, r) \simeq i \frac{9}{16\pi} \frac{m_0 \omega \sigma_0 l}{e} + \frac{1}{4\pi} \frac{\tilde{m} \nu \sigma_0 k^2 l^2}{e}. \quad (16)$$

Основной вклад в интегралы (8) и (9) дает область $r \sim \left(\frac{4\pi\omega\sigma_0}{c^2}\right)^{1/2}$, что позволяет использовать выражения (14)–(16) во всей области интегрирования.

Поле в условиях нормального скин-эффекта определяется уравнением (8) без правой части. Подставляя полученное таким образом выражение для поля в (9), используя при этом асимптотику (14)–(16) и проделав обратное преобразование Фурье, получим следующее выражение для амплитуды смещения:

$$u = -\frac{H(0)\sigma_0}{\rho s c e} \left[\frac{1}{5} \frac{-5im_0\omega + \tilde{m}\nu q^2 l^2}{q^2 + v^2} + \frac{il}{16v} (9im_0\omega + 4\tilde{m}\nu l^2 q^2) \right], \quad (17)$$

где $v^2 = i \frac{4\pi\omega\sigma_0}{c^2}$, $H(0)$ — магнитное поле при $z = 0$.

Решение (17) отвечает волне бегущей в сторону положительных z : $u(z) = u_0 e^{iqz}$. Оно соответствует полюсу выражения (9) (нуль знаменателя). Кроме того, есть решение, отвечающее нулю уравнения $k^2 + i \frac{4\pi\omega\sigma_0}{c^2}$. Как видно, это решение экспоненциально затухает на глубине скин-слоя. Нужно отметить, что решение (17) тоже затухает, но длина его затухания много больше глубины скин-слоя.

На расстояниях, меньших длины затухания звука, можно не учитывать обратный эффект трансформации, о котором говорилось в § 1, и пользоваться выражением (17), которое легко проанализировать, используя расстановку характерных частот, предложенную в работе [3]. Напомним, что в условиях нормального скин-эффекта наше рассмотрение ограничено частотами $\omega \ll \omega_1$; ω_2 (меньшей из двух частот $\omega_1 = \frac{s}{v_F} v$, $\omega_2 = \frac{c^2}{v_F^2} \frac{v^2}{\sigma_0}$).

Приведем предельные значения коэффициента трансформации.

При $l \ll \delta_0 = \frac{c}{\omega_0}$

$$\frac{\Gamma}{\tilde{\Gamma}} \approx \begin{cases} \frac{\omega^2}{\omega_D^2}; & \omega \ll \omega_{эм}, \\ \frac{\omega_{эм}^2}{\omega_D^2}; & \omega_{эм} \ll \omega \ll \frac{s^2}{v_F^2} v, \\ \frac{v_F^2}{s^2} \frac{\omega_{эм}^2 \omega^2}{v^2 \omega_D^2}; & \frac{s^2}{v_F^2} v \ll \omega \ll \left(\frac{s}{v_F} \frac{l^2}{\delta_0^2}\right)^{1/3} \frac{s}{v_F} v, \\ \frac{v_F^6}{s^4} \frac{\omega_{эм} \omega^5}{\omega_D^2 v^4}; & \left(\frac{s}{v_F} \frac{l^2}{\delta_0^2}\right)^{1/3} \frac{s}{v_F} v \ll \omega \ll \frac{s}{v_F} v, \end{cases} \quad (18)$$

Здесь $\tilde{\Gamma} = \frac{m}{M} \frac{m v_F^2}{e^2/a} \frac{sc}{v_F^2}$, $\omega_D \sim \frac{s}{a}$ — дебаевская частота, a — постоянная решетки, $\omega_{эм} = \frac{s^2}{c^2} \frac{\omega_0^2}{v} \ll \frac{s^2}{v_F^2} v$ (см. рис. 1).

При $\delta_0 \ll l \ll \delta_0 \left(\frac{v_F}{s} \right)^{1/2}$ коэффициент трансформации при диффузном отражении не отличается от коэффициента трансформации при зеркальном отражении электронов от поверхности металла (см. [3], формулы (17) и (18)).

Рассмотрим трансформацию в условиях предельно аномального скин-эффекта. При $a, b \ll 1$ ($a = \frac{1+i\omega\tau}{kl}$, $b = \frac{1+i\omega\tau}{rl}$) асимптотика выражений (10)–(12) имеет вид

$$\sigma(\omega, k) \simeq \frac{3\pi}{4} \frac{\sigma_0}{kl}, \quad (19)$$

$$L(\omega, k, r) \simeq i \frac{3}{2} \frac{\omega\sigma_0}{c^2 l} \frac{\ln k - \ln r}{k^2 - r^2}, \quad (20)$$

$$K(\omega, k, r) \simeq i \frac{3}{8\pi} \frac{m_0 \omega \sigma_0}{el} \frac{\ln k - \ln r}{k^2 - r^2} - \frac{3\tilde{m}v(1+i\omega\tau)\sigma_0}{8\pi el} \frac{r^2 \ln a^2 - k^2 \ln b^2}{r^2(k^2 - r^2)}. \quad (21)$$

Уравнение для поля можно решать методом итерации, беря в качестве нулевого приближения решение уравнения (8) без правой части. Подставляя это решение в правую часть уравнения (8), с точностью до члена первого порядка имеем

$$E^k = - \frac{2E'(0)k}{k^3 + i\delta^{-3}} \alpha(k\delta), \quad (22)$$

где $\delta = \left(\frac{c^2 l}{3\pi^2 \omega \sigma_0} \right)^{1/3}$ — скиновая глубина при аномальном скин-эффекте, а $\alpha(k\delta)$ определяется выражением

$$\alpha(k\delta) = 1 + \frac{i}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\ln \frac{k\delta}{t}}{(k\delta)^2 - t^2} \frac{t dt}{t^3 + i}. \quad (23)$$

Метод итерации справедлив, если второе слагаемое в (23) меньше единицы. В зависимости от величины $k\delta$ можно получить следующие оценки:

$$\alpha(k\delta) \sim 1 + \begin{cases} 0 \left(\frac{\ln k\delta}{k^2 \delta^2} \right), & k\delta \gg 1 \\ \frac{7}{48} - \frac{1}{3\pi^2} - \frac{1}{6\pi^2} \ln^2 k\delta + i \left(\frac{\ln k\delta}{6\pi} + \frac{\ln 2}{4\pi} \right), & k\delta \ll 1 \end{cases} \quad (24)$$

Для вычисления объемной части трансформации (первое слагаемое в (9)) мы должны положить везде $k \equiv q = \frac{\omega}{s}$. Нетрудно видеть, что в условиях предельно аномального скин-эффекта $(q\delta)_{\min} > 10^{-2} \div 10^{-3}$, а для чисто электродинамической задачи $(k\delta) = 1$. Это означает, что $\alpha(k\delta)$ мало отличается от единицы (этим оправдывается использование метода итерации), а следовательно, выражения для E^k при зеркальном и диффузном отражении отличаются несущественно. Это, по-видимому, объясняется тем, что в условиях предельно аномального скин-эффекта ток создается главным образом электронами, летящими

параллельно поверхности образца. Эти электроны и определяют поле в металле. Электроны, сталкивающиеся с поверхностью, почти не дают вклада в ток, однако их вклад обуславливает малое отличие между электродинамическими характеристиками металла при зеркальном и диффузном отражении [7].

В трансформации участвуют все электроны проводимости (а не только скользящие), и поэтому при вычислении поверхностной части (второе слагаемое в (9)) нельзя интегрировать, используя только

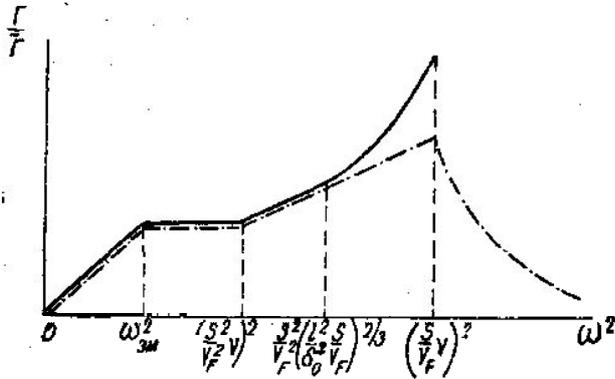


Рис. 1

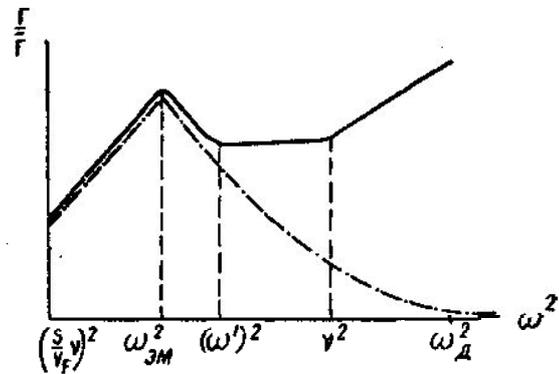


Рис. 2

асимптотику при $a, b \ll 1$. (Если ограничиться формулой (21), возникает расходимость при $r=0$, обусловленная тем, что в предельно аномальном скин-эффекте не учитываются объемные столкновения; $l \rightarrow \infty$).

Поэтому нужно разбить интеграл на два: от 0 до $\frac{(1+i\omega\tau)}{l}$ и от $\frac{(1+i\omega\tau)}{l}$ до ∞ , а для оценки достаточно воспользоваться в первом интеграле асимптотикой, применимой в случае нормального скин-эффекта, а во втором — аномального скин-эффекта.

Окончательно для амплитуды звука получим выражение

$$u_0 \approx -H(0) \frac{\tilde{m} \alpha v_0}{\rho l s c} \left(\frac{q \delta^3}{q^3 \delta^3 + i} + \frac{1+i\omega\tau}{8l} \delta^3 \frac{\ln a_1^2 + q^2 \delta^2 \ln b_1^2}{q^2 \delta^2 + 1} \right). \quad (25)$$

где $b_1 = \frac{1+i\omega\tau}{l} \delta$, а $a_1 = \frac{1+i\omega\tau}{ql}$; $\alpha = 1$.

Из (25) получим предельные случаи:

$$\frac{\Gamma}{\bar{\Gamma}} \approx \begin{cases} \frac{\omega^2}{\omega_D^2} \frac{V_F^2}{s^2} |1 - i(q\delta)^3|, & \frac{s}{v_F} v \ll \omega \ll \omega', \\ \frac{v^2}{\omega_D^2}, & \omega' \ll \omega \ll v, \\ \frac{\omega^2}{\omega_D^2}, & v \ll \omega \ll \omega_D, \end{cases} \quad (26)$$

где $\omega' > \omega_{эм}$ и определяется уравнением $ql = |\delta^3 q^3 + i|$ (см. рис. 2). Случай $l \gg \delta_0 \left(\frac{v_F}{s}\right)^{1/2}$ отличается от предыдущего тем, что отсутствует участок $\Gamma \sim v^2$, а переход к $\Gamma \sim \omega^2$ происходит при частоте ω'' , определяемой уравнением $qv_F = \omega(q^3 \delta^3 + i)$.

§ 3. Обсуждение результатов

При самых низких частотах трансформация определяется инерционной силой. Деформационная сила проявляется при более высоких частотах. Во-первых, потому что деформационное взаимодействие приводит к объемным силам, которые имеют градиентный характер — они тем эффективнее, чем неоднородность электромагнитного поля в металле больше. Неоднородность растет с повышением частоты (первое слагаемое в фигурных скобках (9)). Во-вторых, у поверхности при диффузном отражении есть δ -образная поверхностная сила, которая представляет собой суммарный импульс, переданный границе электронами (второе слагаемое в фигурных скобках (9)). Какая из этих двух сил (объемная или поверхностная) играет большую роль, зависит от длины свободного пробега электронов и от частоты поля.

Вклад от объемной силы в коэффициент трансформации возрастает с ростом длины свободного пробега l (трансформация происходит на длине свободного пробега, см. [1, 3]), однако, когда $l \ll \delta_{\text{ск}}$, коэффициент трансформации Γ , обусловленный объемной силой, перестает зависеть от l . Это понятно, поскольку при этом роль длины трансформации играет скин-глубина.

Напомним, что в трансформации участвуют все электроны; независимость Γ от l не связана с особой ролью скользящих электронов [3, 4].

Вклад от поверхностной силы существенно зависит от величины длины свободного пробега и частоты. При больших l ($l \gg \delta_{\text{ск}}$) роль этой силы уменьшается с увеличением l ($v^2/\omega^2_{\text{д}}$ в (26)). Электроны набирают дополнительную энергию в скин-слое, а импульс, переданный границе, зависит только от частоты столкновения электронов с ней. При увеличении l (при $l \gg \delta_{\text{ск}}$) энергия, приобретаемая электроном от поля, не меняется, а число столкновений с поверхностью уменьшается; это приводит к уменьшению поверхностной силы.

Заметим, что такое поведение имеется только в массивном металле, в котором электроны могут «уйти» из скин-слоя. (О зависимости Γ от l в тонких пленках см. [4].)

Наконец, когда $\omega \gg v$, роль длины свободного пробега означает путь, пройденный электроном за период поля $\frac{v_F}{\omega}$, и Γ перестает зависеть от l , а с увеличением частоты растет за счет поверхностной силы.

Различие коэффициентов трансформации при зеркальном и диффузном отражении главным образом связано с существованием поверхностной силы. Отличие, обусловленное объемными силами, несущественно, так как электромагнитное поле в массивном металле практически не зависит от характера отражения (в тонких пластинах поля разные и, как следствие, коэффициенты Γ существенно отличаются [4]). Вклад поверхностной силы особенно велик при малых длинах свободного пробега электронов и высоких частотах. При $l \ll \delta_0$, $\Gamma \approx \frac{\pi}{M} \frac{v_F}{c}$

уже при $\omega \approx \frac{s}{v_F} v$, что совпадает с максимальным значением при зеркальном отражении. Использование формул нормального скин-эффекта накладывает ограничение на частотах (см. § 2). При $l \ll \delta_0$ такое ограничение не дает возможность получить количественную оценку при самых больших частотах, но ясно из общей теории, что коэффициент трансформации должен расти с повышением частоты.

В работе [1] оценено, что при $\omega \approx \frac{v_F}{\delta_0}$, $\Gamma \approx \frac{m}{M} \frac{v_F^2}{sc}$. При больших длинах свободного пробега и высоких частотах, когда объемные силы дают вклад в Γ пропорциональный ω^{-2} поверхностная сила может преобладать (v^2/ω_D^2 и ω^2/ω_D^2 в (26) и рис. 2). В пределе $\omega \rightarrow \omega_D$, $\Gamma \rightarrow \tilde{\Gamma} \approx \frac{m}{M} \frac{sc}{v_F^2}$.

Результаты работы [1] находятся в качественном согласии с полученными здесь (в частности, с ростом частоты коэффициент трансформации согласно [1] растет). Однако численные значения Γ и частотная зависимость Γ в [1] отличаются от полученных здесь. Это еще одно свидетельство существенной зависимости от поведения электронов на границе металла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каганов М. И., Фикс В. Б., Шикина Н. И. «Физика металлов и металловедение», 26, 11, 1968.
2. Ивановски Г. И., Каганов М. И. «Физика твердого тела», (в печати).
3. Каганов М. И., Фикс В. Б. ЖЭТФ, 62, 1461, 1972.
4. Ивановски Г. И., Каганов М. И., Фикс В. Б. «Физика твердого тела», 15, 1441, 1973.
5. Конторович В. М. ЖЭТФ, 45, 1638, 1963; 59, 2116, 1970.
6. Азбель М. Я., Канер Э. А. ЖЭТФ, 32, 896, 1957.
7. Reuter G. E., Sondheimer E. H. Proc. Roy. Soc., A 195, 336, 1949.

Поступила в редакцию
12.9 1973 г.

Кафедра
квантовой теории