Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1975

УДК 539.126.01

Г. А. САРДАНАШВИЛИ

СПИНОРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНФОРМНОЙ ГРУППЫ

В статье получены конечномерные спинорные представления 15-параметрической конформной группы. Рассматриваются дискретные преобразования на пространстве спиноров.

Рассматриваются линейные конечномерные представления 15-параметрической конформной группы (K-группы) и дискретные преобразования на них. K-группа является непосредственным обобщением группы Пуанкаре, и ее алгебра (K-алгебра) включает в себя генераторы группы Лоренца $M_{\mu\nu}$, трансляций P_μ, растяжения D и специальных конформных преобразований K_μ ($\mu=0, 1, 2, 3$), удовлетворяющих следующим коммутационным соотношениям:

$$\left.\begin{aligned}
&[M_{\alpha\rho}, M_{\mu\nu}] = (g_{\alpha\nu} M_{\rho\mu} + g_{\rho\mu} M_{\alpha\nu} - g_{\alpha\mu} M_{\rho\nu} - g_{\rho\nu} M_{\alpha\mu}),\\
&[D, P_\mu] = -P_\mu, \quad [D, K_\mu] = K_\mu, \quad [D, M_{\mu\nu}] = 0,\\
&[K_\mu, P_\nu] = -2(g_{\mu\nu} D + M_{\mu\nu}), \quad [K_\mu, K_\nu] = 0,\\
&[K_\rho, M_{\mu\nu}] = (g_{\rho\mu} K_\nu - g_{\rho\nu} K_\mu), \quad [P_\rho, M_{\mu\nu}] = (g_{\rho\mu} P_\nu - g_{\rho\nu} P_\nu).
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

K-алгебра изоморфна алгебрам $SU(2,2)$ и $O(4,2)$, алгебре поворотов в 6-мерном пространстве Y с сигнатурой $(+, -, -, -; -, +)$ с генераторами I_{AB} ($A, B=0, 1, 2, 3; 5, 6$):

$$I_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}, \ I_{65} = D, \ I_{5\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu),$$

$$I_{6\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu),$$

$$[I_{AB}, I_{DC}] = (g_{AC} I_{BD} + g_{BD} I_{AC} - g_{AD} I_{BC} - g_{BC} I_{AD}).$$

K-группа является группой движений плоского пространства Минковского с геометрией Вейля (X-пространства). Ее генераторы на X могут быть получены из обобщенных уравнений Киллинга для пространства Вейля и имеют вид

$$M_{\mu\nu} = g_{\nu\nu} x^\nu \partial_\mu - g_{\mu\mu} x^\mu \partial_\nu, \quad P_\mu = \partial_\mu, \tag{2}$$

$$K_\mu = 2x^\mu x^\nu g_{\mu\mu}\partial_\nu - x^2\partial_\mu, \quad D = x^\nu\partial_\nu,$$

K_μ можно рассматривать как нелинейную реализацию группы трансляций. $K_\mu = (-S)(P_\mu)(-S)$, где инверсия $S: x^\mu \to \frac{x^\mu}{x, x}$. Преобразования (2) оставляют инвариантной нулевую квадратичную форму, и, как полагают, унитарные представления K-группы могут быть применимы для описания динамики частиц высоких энергий.

С конечномерными спинорными представлениями связаны попытки применения K-группы для объединения внутренних и динамических симметрий элементарных частиц [1] и для описания их взаимодействия. K-группа является группой движений в пространстве 4-спиноров Ψ и в рамках нелинейной компенсационной теории [2] описывает фермион-фермионное взаимодействие, а с учетом того, что комплексная K-алгебра содержит алгебру SU_3, и слабого.

Обычно в качестве группы движений на Ψ рассматривается группа Лоренца (группа движений пространства Минковского с геометрией Римана), но она не исчерпывает всех движений, а именно не включает в себя взаимные преобразования компонентов 4-спиноров с пунктирными и непунктирными индексами. Оказывается, что выбор той или иной группы движений является весьма существенной характеристикой спиноров, и спиноры Ψ_L, преобразующиеся только по группе Лоренца, и спиноры Ψ_K, преобразующиеся по K-группе (K-спиноры), нельзя отождествлять, хотя они и изоморфны как линейные пространства.

$$D\Psi_L = -\frac{3}{2}\Psi_L, \quad D\Psi_K = \pm\frac{1}{2}\Psi_K,$$

а для того, чтобы на Ψ_L определить представления K-группы, необходимо вводить спин-тензорное многообразие, в котором Ψ_L будут слоем над пространством Вейля, а K-группа действует нелинейно [3], при этом поля $\Psi_L(x)$ и $\Psi_K(x)$ будут связаны соотношением

$$(\Psi_L(x))_\alpha = (e^{\xi^\mu(x)P_\mu} e^{\eta^\mu(x)K_\mu})_\alpha{}^B (\Psi_K(x))_B,$$

где $\xi^\mu(x)$ и $\eta^\mu(x)$ — локальные параметры группы в окрестности единицы.

K-спиноры могут применяться для описания волновых функций кварков и других субчастиц [4], а также задают фундаментальную спинорную структуру пространства-времени [5, 6]. Последняя описывает пространство-время не только как векторное многообразие, как в случае обычной тензорной структуры, но и как афинное и конформное. Спиноры Ψ_L и другие обычно употребляемые спинорные и тензорные величины могут быть получены как мультипроизведения Ψ_K-спиноров. Для построения Ψ_K-спиноров мы будем исходить из представления K-группы на X (2). Для этого рассмотрим в X инвариантное относительно K-группы семейство изотропных прямых, элементы которого могут быть выражены через спиноры [5]. Тогда автоморфизмы этого семейства под действием K-группы будут индуцировать ее представление на Ψ. Аналогично находятся дискретные преобразования на Ψ, соответствующие пространственному и временному отражению и инверсии в X и допускаемые им. Такой подход дает возможность построить на Ψ не только представление алгебры генераторов, но и всей K-группы [7].

§ 1. Твисторы

Всякому тензору $X^{i\ldots}_{k\ldots}$ в X можно поставить в соответствие мультиспинор [8]

$$X^{i\ldots}_{k\ldots} \leftrightarrow \Psi^{II'\ldots}_{KK'\ldots} = X^{i\ldots}_{k\ldots} \sigma^{II'}_{i}, \ldots, \sigma^{k}_{KK'} \ldots$$

(σ-матрицы Паули). Если, например, x — изотропный вектор и $x^0 > 0$, то

$$x \leftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \Psi^{11'} & \Psi^{12'} \\ \Psi^{21'} & \Psi^{22'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}^1\eta^1 & \tilde{\xi}^1\eta^2 \\ \tilde{\xi}^2\eta^1 & \tilde{\xi}^2\eta^2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где η, ξ — пунктирные и непунктирные спиноры, $\tilde{\xi}^A = (\eta^A)^*$, а Ψ и $\tilde{\Psi}$ принадлежат различным неприводимым представлениям K-группы (см. ниже).

Любую изотропную прямую в X можно задать парой спиноров (ξ^A и η^A), связанных соотношениями [5]

$$\eta_B = -i\,\xi^A l_{AB}, \quad \tilde{\xi}^B = i\tilde{\eta}_A l^{AB}, \tag{4}$$

где (ξ_A, $\tilde{\eta}_B$) описывают вектор направления прямой, т. е. вектор момента прямой относительно нуля координат, а l_{AB} — радиус-вектор одной из точек прямой. Система (ξ^A, $\eta_B : \eta_B = -i\xi^A l_{AB}$) называется твистором и задает спинорную структуру пространства-времени [5, 6].

Преобразования K-группы на твисторах имеют вид: трансляции $P_\mu : x'^\mu = x^\mu + a^\mu$

$$(\xi'^A, \eta'_B) = (\xi^A, \eta_B - i\,\xi^C a^\mu_{CB}),$$

преобразования Лоренца $M_{\mu\nu} : x^i = (\Lambda_{\mu\nu})^i_k x^k$

$$(\xi'^A, \eta'^B) = (b^A_C \xi^C, b^{*B}_C \eta^C),$$

растяжения $D : x'^\mu = a^{-1} x^\mu$

$$(\xi'^A, \eta'_B) = (a^{1/2} \xi^A, a^{-1/2} \eta_B).$$

Для того чтобы выписать преобразования K_μ на твисторах, необходимо сначала рассмотреть дискретные отображения на них.

1. Временное отражение T. $T : x^0 \to -x^0$, $l_{AB} \to -l^{BA}$, $l^{BA} \to -l_{AB}$. Из условия инвариантности (4) получаем

$$\xi^A \to k\tilde{\eta}_A, \ \eta_A \to k\tilde{\xi}^A, \quad \tilde{\xi}^A \to c\,\eta_A, \quad \tilde{\eta}_A \to c\,\xi^A,$$

где k и c — некоторые константы.

2. Пространственное отражение P. $P : x^i \to -x^i$, $l_{AB} \to l^{AB}$, $l^{BA} \to l_{AB}$. Аналогично 1 получаем

$$\xi^A \to k\tilde{\eta}_A, \ \eta_A \to -k\tilde{\xi}^A, \quad \tilde{\xi}^A \to c\,\eta_A, \quad \tilde{\eta}_A \to -c\,\xi^A.$$

3. Инверсия S.

$$S : x^\mu \to \frac{x^\mu}{(x,\ x)}, \quad l_{AB} \to \frac{1}{l_{AB}} = (l_p^{-1})_{AB},$$

где $l = det(l_{AB})$, а $(l_p)_{AB}$ получается из l_{AB} P-отражением; (4) принимает вид

$$\eta'_B = -i\xi''^A l^{-1}_{pAB}, \quad \xi'^A = i\,\eta'_B l_{pBA}.$$

Аналогично для $\widetilde{\Psi}$. Используя результат для P-отражения, находим

$$\xi^A \to k\widetilde{\xi}^A, \quad \eta^A \to k\widetilde{\eta}^A, \quad \widetilde{\xi}^A \to c\,\xi^A, \quad \widetilde{\eta}^A \to c\,\eta^A.$$

Применяя полученные преобразования T, P и S к (3), приходим к условию $kc=1$, что эквивалентно $T^2=1$, $P^2=-1$, $S^2=1$ на Ψ. $PT=-TP$.

4. K-преобразование. Воспользуемся его представлением

$$K_\mu = (-S)(P'_\mu)(-S).$$

$$(-S):(\xi^A,\ \eta_B:\eta_B=-i\xi^A l_{A|B}) \to (\widetilde{\xi}^A,\ \widetilde{\eta}_B:\widetilde{\xi}^A = i\widetilde{\eta}_B\, l_{pBA}),$$

$$(P_\mu):(\widetilde{\xi}^A,\ \widetilde{\eta}_B) \to (\widetilde{\xi}^A + i\widetilde{\eta}_B\, a^\mu_{pBA},\ \widetilde{\eta}_B),$$

$$(-S):(\widetilde{\xi}^A + i\widetilde{\eta}_B a^\mu_{pBA},\ \widetilde{\eta}_B) \to (\xi^A - i\,\eta_B\, a^\mu_{pBA},\ \eta_B),$$

$$K_\mu:(\xi^A,\ \eta_B) \to (\xi^A - i\eta_B\, a^\mu_{pBA},\ \eta_B).$$

Таким образом получены представления K-группы на твисторах, или, иными словами, спинорах, описывающих класс изотропных прямых в X. Можно рассмотреть и обратную задачу. Исходя из представления некоторой группы Γ на 4-спинорах, построим ее преобразования на X, хотя последние уже могут и не образовывать группу. Например, если $\Gamma:\Psi \to \Psi+\varepsilon$, то на X индуцируются преобразования так называемых «суперсимметрий» [9].

§ 2. Спинорные представления

Выпишем генераторы K-группы и постулируем их на всем комплексном пространстве спиноров

$$M_{23} = a_1 = \frac{-i}{2}(\xi^2\partial\xi^1 + \xi^1\partial\xi^2 - \eta^2\partial\eta^1 - \eta^1\partial\eta^2),$$

$$M_{31} = a_2 = \frac{1}{2}(\xi^1\partial\xi^2 - \xi^2\partial\xi^1 + \eta^1\partial\eta^2 - \eta^2\partial\eta^1),$$

$$M_{12} = a_3 = \frac{-i}{2}(\xi^1\partial\xi^1 - \xi^2\partial\xi^2 + \eta^2\partial\eta^2 - \eta^1\partial\eta^1),$$

$$M_{01} = b_1 = \frac{1}{2}(\xi^2\partial\xi^1 + \xi^1\partial\xi^2 + \eta^2\partial\eta^1 + \eta^1\partial\eta^2),$$

$$M_{02} = b_2 = \frac{i}{2}(\xi^1\partial\xi^2 - \xi^2\partial\xi^1 - \eta^1\partial\eta^2 + \eta^2\partial\eta^1),$$

$$M_{03} = b_3 = \frac{1}{2}(\xi^1\partial\xi^1 - \xi^2\partial\xi^2 - \eta^2\partial\eta^2 + \eta^1\partial\eta^1),$$

$$D = \frac{1}{2}(\xi^1\partial\xi^1 + \xi^2\partial\xi^2 - \eta^1\partial\eta^1 - \eta^2\partial\eta^2), \tag{5}$$

$$P_0 = -i(\xi^2\partial\eta^1 - \xi^1\partial\eta^2), \quad P_2 = (\xi^1\partial\eta^1 + \xi^2\partial\eta^2),$$
$$P_1 = i(\xi^2\partial\eta^2 - \xi^1\partial\eta^1), \quad P_3 = i(\xi^1\partial\eta^2 + \xi^2\partial\eta^1),$$
$$K_0 = i(\eta^2\partial\xi^1 - \eta^1\partial\xi^2), \quad K_2 = (\eta^1\partial\xi^1 + \eta^2\partial\xi^2),$$
$$K_1 = i(\eta^1\partial\xi^1 - \eta^2\partial\xi^2), \quad K_3 = -i(\eta^2\partial\xi^1 + \eta^1\partial\xi^2).$$

Генераторы (5) удовлетворяют коммутационным соотношениям (1) и являются базисом комплексной K-алгебры (для группы Пуанкаре такие генераторы были получены в [10]). Они реализуются на пространстве функций от Ψ, в частности на мультипроизведениях типа $(\xi^1)^{n-k}(\xi^2)^k(\eta^1)^p(\eta^2)^{m-p}$. В матричной форме на спинорах [11] (ξ и η) (5) запишутся

$$M_{\mu\nu}=\frac{1}{4}[\gamma_\mu,\ \gamma_\nu],\qquad D=-\frac{1}{2}\gamma_5,$$
$$P_\mu=\frac{1}{2}\gamma_\mu(1+\gamma_5),\ K_\mu=\gamma_\mu(1-\gamma_5). \tag{6}$$

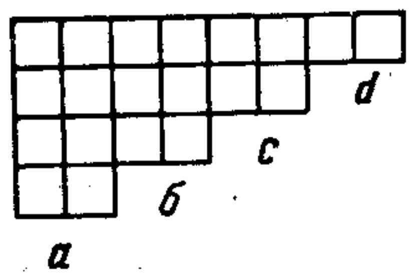
Дадим теперь классификацию неприводимых линейных конечномерных представлений K-группы по представлениям группы Лоренца и растяжений. (В [12] дана такая классификация по компактной подгруппе $\{M_{\mu\nu},\ I_{5i},\ I_{60}\}$). Неприводимые представления характеризуются тремя операторами Казимира:

$$C_1=I_{AB}I^{AB}=a^2-b^2+\frac{1}{2}(P^\mu K_\mu+K^\mu P_\mu)-D^2,$$
$$C_2=\frac{1}{24}\varepsilon_{ABCDMN}I^{AB}I^{CD}I^{MN}=2(\bar a\bar b)D+(\bar a\bar P)K_4-$$
$$-(\bar a\bar K)P_4-\varepsilon_{ikl}b^iP^kK^l,$$
$$C_3=\frac{1}{128}(\varepsilon_{ABCDMN}I^{CD}I^{MN})^2,$$

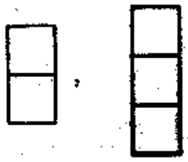
а состояния внутри представлений задаются собственными значениями m_1, $j(j_1+1)$, m_2, $j_2(j_2+1)$, λ, взаимнокоммутирующих операторов (b_3+ia_3), $(b+ia)^2$, (b_3-ia_3), $(b-ia)^2$, D. (j_1, m_1, j_2, m_2, λ) образуют базис конечномерного представления K-группы. Минимальное представление запишется:

$$\square=\begin{matrix}\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right),\ \left(0,\ 0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right),\\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right).\end{matrix}$$

Это — представление (ξ, η) с генераторами (6). Остальные конечномерные представления получаются из $\square$ методом диаграмм Юнга

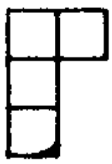
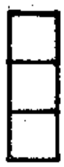


Выпишем базисные диаграммы



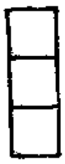
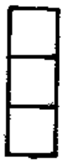
$$= \begin{matrix} \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right) & \left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right) \\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right) & \left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right) \\ (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1) & (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1) \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} \left(\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ -\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ -\frac{1}{2}\right) \\ \left(0,\ 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) & \left(0,\ 0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) \end{matrix}$$

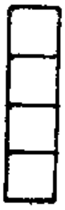
 — это комплексные 6-вектора пространства Y, вектора пространства X являются элементами представления .  — это представление $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ с генераторами

$$M_{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \qquad D = \frac{1}{2}\gamma_5,$$

$$P_\mu = \frac{-1}{2}\gamma_\mu(1-\gamma_5), \quad K_\mu = -\frac{1}{2}\gamma_\mu(1+\gamma_5).$$

Дискретные преобразования P, T и S осуществляют переход между двумя представлениями  и , причем выполняется условие $k^3 = c$, а следовательно, 1) $k = \pm 1$, $c = \pm 1$ и 2) $k = \pm i$, $c = \pm 1$. При интерпретации Ψ и $\tilde{\Psi}$ как полевых функций частиц, без учета внутренних симметрий  и  соотносятся как представления частицы и античастицы.

 —скаляр относительно K-группы, P и T — псевдоскаляры относи-

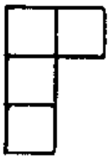
тельно S.  задает комплексную билинейную форму на Ψ:

$$(\Psi,\ \Psi) = (\xi^1 \tilde{\xi}^2 - \xi^2 \tilde{\xi}^1) + (\eta^1 \tilde{\eta}^2 - \eta^2 \tilde{\eta}^1). \tag{7}$$

При этом $(\Psi, \Psi) = (\Psi, \Psi)^*$ и $(\Psi, \Psi') = (\Psi', \Psi)^*$ имеют место только тогда, когда $\tilde{\Psi}$ определяются через Ψ, как

$$\tilde{\xi}^A = (\eta^A)^*, \quad \tilde{\eta}^A = -(\xi^A)^*. \tag{8}$$

В этом случае комплексные преобразования группы Лоренца и растяжений порождают действительные преобразования на векторах пространства X, сдвиги же и K_μ-преобразования в X остаются комплексными. При реализации на пространствах с общей билинейной формой (7) теряется смысл понятия компактных и некомпактных алгебр, и K-алгебра становится изоморфной, например, любой алгебре $SUL_{p,q}(p+q=4)$, в частности $SU(4)$, что и позволяет ее использовать для описания внутренних симметрий.

Спиноры Ψ_L могут быть получены из Ψ_K как элементы представления  с $\lambda = -{}^3/_2$.

Выпишем теперь дискретные отображения T, P и S на Ψ (только вариант 2). Они соответствуют отражениям в пространстве Y [13]:

$$\begin{matrix} y^0 \to -y^0 \\ y^{i,5,6} \to y^{i,5,6} \end{matrix} : \begin{matrix} x^0 \to -x^0 \\ x^i \to x^i \end{matrix} : \begin{matrix} D \to D,\ P_0 \to -P_0,\ P_i \to P_i \\ K_0 \to -K_0,\ K_i \to K_i \\ M_{0j} \to -M_{0j},\ M_{ij} \to M_{ij} \end{matrix} : \begin{matrix} \xi^A \to i\tilde{\eta}_A,\ \eta_A \to i\tilde{\xi}^A \\ \tilde{\xi}^A \to -i\eta_A,\ \tilde{\eta}_A \to -i\xi^A \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} y^i \to -y^i \\ y^{0,5,6} \to y^{0,5,6} \end{matrix} : \begin{matrix} x^0 \to x^0 \\ x^i \to -x^i \end{matrix} : \begin{matrix} D \to D,\ P_0 \to P_0,\ P_i \to -P_i \\ K_0 \to K_0,\ K_i \to K_i \\ M_{0j} \to -M_{0j},\ M_{ij} \to M_{ij} \end{matrix} : \begin{matrix} \xi^A \to i\tilde{\eta}_A,\ \eta_A \to -i\xi^A \\ \tilde{\xi}^A \to -i\eta_A,\ \tilde{\eta}_A \to i\xi^A \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} y^\mu \to -y^\mu \\ y^{5,6} \to y^{5,6} \end{matrix} : x^\mu \to -x^\mu : \begin{matrix} D \to D,\ P_\mu \to -P_\mu \\ K_\mu \to -K_\mu,\ M_{\mu\nu} \to M_{\mu\nu} \end{matrix} : \begin{matrix} \xi^A \to -\xi^A,\ \eta_A \to \eta_A \\ \tilde{\xi}^A \to -\tilde{\xi}^A,\ \tilde{\eta}_\mu \to \tilde{\eta}_A \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} y^{\mu,5} \to y^{\mu,5} \\ y^6 \to -y^6 \end{matrix} : x^\mu \to \frac{x^\mu}{(x,\ x)} : \begin{matrix} D \to -D.\ P_\mu \to -K_\mu \\ K_\mu \to -P_\mu,\ M_{\mu\nu} \to M_{\mu\nu} \end{matrix} : \begin{matrix} \xi^A \to i\tilde{\xi}^A,\ \eta^A \to i\tilde{\eta}^A \\ \tilde{\xi}^A \to -i\xi^A,\ \tilde{\eta}^A \to -i\eta^A \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} y^{\mu,6} \to y^{\mu,6} \\ y^5 \to -y^5 \end{matrix} : x^\mu \to \frac{-x^\mu}{(x, x)} : \begin{matrix} D \to -D, & P_\mu \to K_\mu \\ K_\mu \to P_\mu, & M_{\mu\nu} \to M_{\mu\nu} \end{matrix} :$$

$$: \begin{matrix} \xi^A \to -i\tilde{\xi}^A, & \eta^A \to i\tilde{\eta}^A \\ \tilde{\xi}^A \to i\xi^A, & \tilde{\eta}^A \to -i\eta^A \end{matrix}.$$

Преобразования на Ψ даны с точностью до умножения на -1. Из них видно, что y^6-отражение на (ξ, η) и $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ при условиях (8) соответствует преобразованию зарядового сопряжения C, а y^5-отражение соответствует CPT-преобразованию.

§ 3. Линейные конформно-инвариантные уравнения

Ни в коей мере не касаясь в данной работе общей проблемы построения К-инвариантного уравнения, построим для K-спиноров аналог уравнений Дирака, а именно обобщенное линейное уравнение Гельфанда — Яглома [14] в 6-мерном пространстве

$$(\Pi^A \partial_A - \varkappa)\Psi = 0. \tag{9}$$

Выбор пространства Y обусловлен линейным представлением в нем алгебры генераторов K-группы, в то время как на X это представление (2) нелинейно. На X можно построить K-инвариантные уравнения, исходя из нелинейных представлений K-группы, но помимо полей Ψ они будут содержать векторные голдстоуновские поля, которые можно интерпретировать как связности в геометрии Вейля и которые, будучи выраженными через Ψ, приводят к нелинейным уравнениям типа Гейзенберга — Иваненко [3]. Утверждение же, что однородные уравнения на X являются K-инвариантными, не учитывает, что конформные преобразования действуют и на Ψ.

Условия K-инвариантности уравнения (9) имеют вид

$$[\Pi_A, I_{BC}] = (g_{AB}\Pi_C - g_{AC}\Pi_B), \tag{10}$$

где I — генераторы (5). Кроме того, если (10) инвариантны относительно дискретных преобразований, то и уравнение (9) будет инвариантно относительно им. Построим Π_A, удовлетворяющие (10). Для этого достаточно найти, например, только Π_5, поскольку остальные Π_A могут быть получены из него по формуле

$$[\Pi_5, I_{5A}] = -\Pi_A \ (A = 0, 1, 2, 3; 6).$$

Условия (10) для Π_5 сводятся к следующим независимым:

$$[\Pi_5, a_i] = [\Pi_5, b_3] = 0,$$

$$[[\Pi_5, D], D] = 0, \quad [[\Pi_5, I_{50}], I_{50}] = -\Pi_5.$$

Решая их относительно Π_5 с учетом инвариантности относительно дискретных отображений, получаем

$$\Pi_5 = c_1(\xi^A\partial\tilde{\xi}^A - \eta^A\partial\eta^A) + c_2(\tilde{\xi}^A\partial\xi^A - \tilde{\eta}^A\partial\eta^A),$$

где $c_1 = -c_2 = 1$, если отражения на Ψ задаются вариантом 1, (и $c_1 = c_2 = i$ для 2). Из Π_5 находим остальные Π_A:

$$\Pi_b = c_1(\xi^A\partial\tilde{\xi}^A + \eta^A\partial\tilde{\eta}^A) - c_2(\xi\partial\xi^A + \tilde{\eta}^A\partial\eta^A),$$

$$\Pi_0 = -ic_1(\xi^A\partial\tilde{\eta}_A + \eta_A\partial\tilde{\xi}^A) - ic_2(\tilde{\xi}^A\partial\eta_A + \tilde{\eta}_A\partial\xi^A),$$

$$\Pi_1 = -ic_1(-\xi^A\partial\tilde{\eta}_B + \eta_A\partial\tilde{\xi}^B) - ic_2(-\tilde{\xi}^A\partial\eta_B + \tilde{\eta}_A\partial\xi^B). \quad (A \neq B),$$

$$\Pi_2 = -ic_1(i\xi^A\partial\tilde{\eta}^A + i\eta^A\partial\tilde{\xi}^A) - ic_2(i\tilde{\xi}^A\partial\eta^A + i\tilde{\eta}^A\partial\xi^A),$$

$$\Pi_3 = -ic_1(\xi^A\partial\tilde{\eta}^B + \eta^A\partial\tilde{\xi}^B) - ic_2(\tilde{\xi}^A\partial\eta^B + \tilde{\eta}^A\partial\xi^B) \quad (A \neq B).$$

Π_A можно рассматривать как генераторы вращений в 7-мерном пространстве, так же как γ_μ—генераторы вращений в 5-мерном пространстве. $\Pi_A = 2I_{7A}$, $\gamma_\mu = K_\mu + P_\mu = 2I_{6\mu}$. В том случае, когда $\Psi = (\xi, \eta, \tilde{\xi}, \tilde{\eta})$, выполняются соотношения $\Pi_A\Pi_B + \Pi_B\Pi_A = 2g_{AB}$.

Уравнение (9) для таких Ψ запишется:

$$\begin{aligned}
\varkappa\xi^A &= -ic_2\{[\sigma^0\partial_0 - \sigma^i\partial_i]\tilde{\eta}_A + iI\partial_k\tilde{\xi}^A\},\\
\varkappa\tilde{\eta}_A &= -ic_1\{[\sigma^0\partial_0 + \sigma^i\partial_i]\xi^A - iI\partial_k\eta_A\},\\
\varkappa\tilde{\xi}^A &= -ic_1\{[\sigma^0\partial_0 - \sigma^i\partial_i]\eta_A + iI\partial_\lambda\xi^A\},\\
\varkappa\eta_A &= -ic_2\{[\sigma^0\partial_0 + \sigma^i\partial_i]\tilde{\xi}^A - iI\partial_\lambda\tilde{\eta}_A\},
\end{aligned} \tag{11}$$

где $\lambda = y^5 - y^6$, $k = -(y^5 + y^6)$. Обычным образом из (11) получается

$$(\partial_0^2 - \partial_i^2 - \partial_\lambda\partial_k)\Psi = \varkappa^2\Psi,$$

(11) будет инвариантно относительно K-группы и дискретных преобразований.

Можно дать различные интерпретации уравнений (11), основываясь на той или иной трактовке преобразований конформной группы [15]. Общим является представление о том, что оно описывает дуплет частиц, расщепляемых по той или иной характеристике, массе, внутренним величинам и др., связываемым с λ, однако все рассматриваемые варианты пока не являются достаточно убедительными.

Автор благодарит проф. Д. Д. Иваненко и докт. физ.-мат. наук Д. Ф. Курдгелаидзе за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Flato M., Sternheimer D., Viger J. G. R. Acad. Sc. (Paris), **260**, 1965.
2. Сарданашвили Г. А. «Изв. вузов», физика, **12**, 1974.
3. Сарданашвили Г. А. Тезисы докладов всесоюзного симпозиума «Новейшие проблемы гравитации». М., 1973.
4. Durr H. P. Nuovo cimento, **7A**, 2, 1972.
5. Penrose R. Proc. Roy. Soc., **A—305**, 1481, 1968.
6. Пенроуз Р. Структура пространства-времени. М., 1972.
7. Сарданашвили Г. А. Тезисы докладов III Советской гравитационной конференции. Ереван, 1972.
8. Картан Э. Теория спиноров. М., 1947.
9. Salam A., Strathdee J. preprint. IC/74/42, Trieste.
10. Соколик Г. А. Сб. «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц». М., 1970.
11. Kastrup H. A. Ann. der Phys., **9**, 1962.
12. Yao T. J. Math. Phys., **8**. 10, 1967.
13. Конопельченко Н. «Теоретическая и математическая физика», **5**, 3, 1970.
14. Гельфанд И. М., Яглом А. М. ЖЭТФ, **18**, 703, 1948.
15. Murai J. Nucl. Phys., **6**, 1958.

Поступила в редакцию
21.9 1972 г.

Кафедра
теоретической физики