ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1975

УДК 621.315.592

В. А. БОНЧ-БРУЕВИЧ, А. Ф. РУМЫНИНА

# О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕОДНОРОДНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ СИСТЕМ С ВНУТРИЗОННЫМ ПОГЛОЩЕНИЕМ

Изучены особенности бесполевого нагрева носителей заряда при внутризонном поглощении света. Явно найдена стационарная неравновесная функция распределения и доказана флуктуационная устойчивость описываемого ею состояния.

## § 1. Постановка задачи

В работах [1—4] показана возможность «бесполевого» нагрева носителей заряда в полупроводниках в условиях, когда термодинамическое равновесие нарушено за счет искусственно поддерживаемого пространственного градиента функции распределения. Конкретно в цитированных работах исследовался случай, когда указанный градиент создавался в результате междузонного поглощения света при пространственно неоднородной подсветке. Разогрев электронов (дырок) во всем образце достигался при этом либо в результате амбиполярной диффузии оптически созданных горячих носителей заряда [1—3], либо в результате работы сил давления [4]. Естественно, оба эти механизма эффективны лишь при достаточно большой длине свободного пробега по энергии, $l_э$.

В данной работе исследуются некоторые особенности пространственно неоднородной равновесной системы с внутризонным поглощением, а также решается задача о флуктуационной устойчивости такой системы.

Будем исходить из обычной системы уравнений [2] для симметричной и антисимметричной частей, $f_s$ и $f_a$ — функции распределения $f$:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla f_a) + e(\mathbf{E}, \nabla_p f_a) = I[f_s], \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla f_s) + e(\mathbf{E}, \nabla_p f_s) = I[f_a]. \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{E}$ — напряженность действующего электрического поля, $I$ — интеграл столкновений, $\mathbf{v}$ — скорость носителей заряда с импульсом $\mathbf{p}$. Как и в [1—3], будем считать напряженность поля достаточно малой, пренебрегая ее влиянием на вид функции распределения $f_s$. Это оправдано, если выполняется неравенство (1):

$$\frac{e\mathbf{E}L_0}{W_0} \ll 1, \tag{3}$$

где $W_0$ — характерная энергия носителей заряда, а $L_0$ — характерная длина неоднородности. Существенно, что под $\mathbf{E}$ здесь следует понимать напряженность полного действующего поля, возникающего как за счет внешних источников, так и в результате перераспределения самих носителей заряда в пространстве. В интересующем нас случае монополярного образца условие (3) может выполняться лишь, если радиус экранирования $r_0$ достаточно велик: $r_0 \gg l_э$. С другой стороны, длина $l_э$ должна значительно превышать длину свободного пробега по импульсу $l_p$. Это означает, что в рассматриваемой системе должны быть существенны лишь слабо неупругие механизмы рассеяния энергии. Конкретно мы ограничимся, как и в [1—3], рассеянием энергии на акустических фононах (при этом чисто упругий механизм рассеяния импульса может в принципе быть произвольным). В такой системе дрейфовая скорость $v_d$ (понимаемая как $j/en$, где $j$ и $n$ — плотность тока и концентрация носителей заряда) может быть мала по сравнению со средней квадратичной скоростью хаотического движения частиц:

$$v_d \ll V_T. \tag{4}$$

Наконец, ограничимся простейшим параболическим законом дисперсии:

$$W_p = \frac{p^2}{2m}. \tag{5}$$

Как известно [6], в указанных условиях $f_a \ll f_s$ и

$$I[f_a] = -f_a/\tau, \tag{6}$$

где $\tau$ — время свободного пробега по импульсу. При этом уравнение для $f_s$ имеет вид [1]

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + F(W, \mathbf{x}) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \int_0^t dt' \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) \times$$
$$\times \frac{2W}{3m} \nabla^2 f_s(W, \mathbf{x}, t') = I[f_s]. \tag{7}$$

Здесь функция $F(W, \mathbf{x})$ определяется начальным значением $f_a$.

Уравнение для стационарной задачи получается из (7), если считать, что $f_s$ не зависит от времени, и устремить $t$ к бесконечности:

$$-\frac{2W\tau}{3m} \nabla^2 f_s = I[f_s]. \tag{8}$$

Граничные условия, накладываемые на $f_s$, как функцию координат, определяются постановкой опыта.

Будем считать, что освещается лишь узкая полоска образца (см. рис. 1). Ширина этой полоски, $2\varepsilon$, предполагается малой по сравнению с длиной образца $L$ и $l_э$. Это означает, что мы вправе формально

[1] Как и в [2], мы пренебрегаем процессами рекомбинации и захвата носителей.

совершить предельный переход $\varepsilon \to 0$, решая уравнение (8) отдельно при $x>0$ и $x<0$ и накладывая условия непрерывности

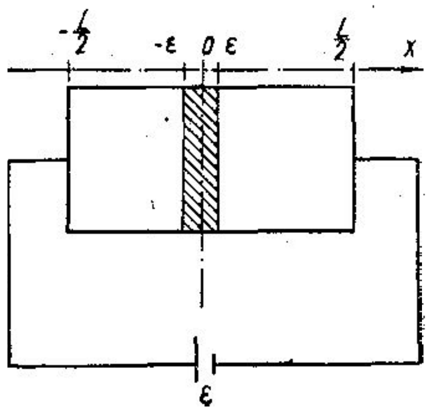
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\partial f_s}{\partial x}\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = Y(w); \qquad f_s(W, +\varepsilon) = f_s(W, -\varepsilon). \tag{9,а}$$

Здесь функция $Y(W)$ связана с вероятностью оптического поглощения света свободными носителями заряда.

Пусть далее $L \gg l_э$. Тогда граничные условия на контактах $\left(\text{при } x = \pm\frac{L}{2}\right)$ можно заменить более простым соотношением

$$f_s \underset{x \to \pm \frac{L}{2}}{\longrightarrow} f_{s,0}, \tag{9,б}$$

где $f_{s,0}$ есть равновесная функция распределения. Наконец, допустим, что поглощение света происходит практически равномерно по всей толщине образца (в пределах параллелепипед[illegible] р[illegible] 2 ). Э[illegible] р[illegible]ривать лишь одномерную задачу $f_s = f_s(W, x)$, соответственно чему вопрос о граничных условиях по переменным $y$ и $z$ не возникает.




Для установления связи между функциями $Y(W)$ и $f_s$ заметим, что первое из равенств (9, а) получается предельным переходом $\varepsilon \to 0$ из уравнения типа (8). Именно при конечном значении $\varepsilon$ в области, где происходит поглощение света, вместо (8) следовало бы писать (мы рассматриваем невырожденный газ)

$$-\frac{2W\tau}{3m}\frac{\partial^2 f_s}{\partial x^2} = I[f_s] + \int \frac{dp'}{(2\pi\hbar)^3}\{\mathcal{P}(\mathbf{p}' \to \mathbf{p}) f_s(W_{p'}) -$$
$$-\mathcal{P}(\mathbf{p} \to {}_{p}{}') f_s(W_p)\}. \tag{10}$$

Здесь функции $\mathcal{P}(\mathbf{p}' \to \mathbf{p})$ и $\mathcal{P}(\mathbf{p} \to \mathbf{p}')$ характеризуют вероятности соответствующих оптических переходов. Пренебрегая взаимодействием носителей заряда с равновесным тепловым излучением, мы можем считать, что эти величины пропорциональны силе света.

Интегрируя (10) по малой области около точки $x=0$ $(-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon)$ и замечая, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} I[f_s]\, dx = 0,$$

получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\partial f_s}{\partial x}\Big|_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{3m}{2W\tau(2\pi\hbar)^3}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dx \times$$
$$\times \int d\mathbf{p}' \{\mathcal{P}(\mathbf{p}' \to \mathbf{p}) f_s(W_{p'}) - \mathcal{P}(\mathbf{p} \to \mathbf{p}') f_s(W_p)\}. \tag{11}$$

В принятых выше предположениях сила света пропорциональна $\delta(x)$. Поэтому интеграл по $x$ в правой части (11) оказывается конечным при $\varepsilon \to 0$, и мы получаем

$$Y(W) = I_0\{[s(W,\ W+\hbar\omega) + s(W,\ W-\hbar\omega)]\, f_s(W,\ 0) -$$
$$-[s(W,\ W+\hbar\omega)\, f_s(W+\hbar\omega,\ 0) + s(W,\ W-\hbar\varphi)\, f_s(W-\hbar\omega,\ 0)]\}. \quad (12)$$

Здесь $I_0$ — сила света, а функция $s(W,\ W')$ пропорциональна сечению захвата фотона $\sigma(W)$ и обратно пропорциональна $\tau(W)$ и квадрату тепловой скорости $v_T^2$ [1].

## § 2. Стационарная функция распределения

Введем, как и в [2, 7], собственные функции оператора столкновений $f_\lambda(W)$, полагая

$$\frac{3m}{2W\tau} I[f_\lambda(W)] = -\lambda f_\lambda(W)$$

(очевидно, $\lambda \geqslant 0$).

В случае, когда рассеяние происходит только на акустических фононах, $\lambda = 2n$, $f_\lambda = N_\lambda L_n^1\left(\frac{W}{T_0}\right)\exp\left(-\frac{W}{T_0}\right)$, где $n$ — целые числа, $L_n^1$ — полиномы Лагерра, а $N_\lambda$ — нормирующий множитель. Тогда функцию $f_s$ можно представить в виде

$$f_s(W,\ x) = \sum_{\lambda \neq 0} C_\lambda(x)\, f_\lambda(W) + f_{s,0}. \quad (13)$$

Функции $f_\lambda(W)$ ортонормированы условием

$$\int_0^\infty f_\lambda(W)\, f_{\lambda'}(W)\, Z(W)\, dW = N_\lambda \delta_{\lambda\lambda'};$$

где

$$Z(W) = W\tau(W)\exp\left(\frac{W}{T_0}\right) Z', \quad (14)$$

а $Z'$ определяется равенством $\oint d\Omega p^2 dp = Z'(W)\, dW$ (в случае рассеяния на акустических фононах $Z \sim W\exp\left(\frac{W}{T_0}\right)$.

Подставив (13) в уравнение (12) и пользуясь условием (14), получим

$$\frac{d^2C_\lambda}{dx^2} = \lambda C_\lambda. \quad (15)$$

В силу (9, б) это дает [2]

---

[1] В равновесном случае, когда, например, $f_s \sim \exp\left(-\frac{W}{T_0}\right)$, где $T_0$ — температура решетки, мы должны писать вместо $I_0$ (с точностью до константы) $n(\omega)$ при слагаемых с поглощением и $n(\omega)+1$ — при слагаемых с испусканием ($n(\omega)$ — функции Планка). При этом, естественно $Y(W) = 0$.

[2] Напомним, что собственное значение $\lambda = 0$ отвечает равновесной функции распределения $f_0 \sim \exp\left(-\frac{W}{T_0}\right)$.

$$x \geqslant 0: C_\lambda = A_\lambda \exp(-x\sqrt{\lambda}) + \delta_{\lambda,0},$$

$$x \leqslant 0: C_\lambda = A_\lambda \exp(x\sqrt{\lambda}) + \delta_{\lambda,0}. \tag{16}$$

После простых преобразований равенства (16), (12), (9,a) и (14) приводят к следующему уравнению для определения коэффициентов $A_\lambda$:

$$A_\lambda\sqrt{\lambda} + \sum_{\lambda'\neq 0} \Gamma_{\lambda\lambda'} A_{\lambda'} + (A_0 + 1)\Gamma_{\lambda,0} = 0. \tag{17}$$

Здесь

$$\Gamma_{\lambda\lambda'} = I_0 \int_0^\infty dW Z(W)\{[S(W, W + \hbar\omega) + s(W, W - \hbar\omega)] f_{\lambda'}(W) -$$

$$- [s(W, W + \hbar\omega) f_{\lambda'}(W + \hbar\omega) + s(W, W - \hbar\omega) f_{\lambda'}(W - \hbar\omega)]\} f_\lambda(W); \tag{18}$$

$\Gamma_{\lambda,0}$ получается из $\Gamma_{\lambda\lambda'}$ при $\lambda' = 0$.

Система (17) имеет единственное и нетривиальное решение, так как детерминант ее не содержит произвольных параметров и, следовательно, вообще говоря, не равен нулю.

Таким образом, функция распределения имеет вид

$$f_s(W, x) = \sum_{\lambda\neq 0} A_\lambda \exp(-|x|\sqrt{\lambda}) f_\lambda(W) + (A_0 + 1) f_0(W), \tag{19}$$

где (при $\lambda \neq 0$)

$$A_\lambda = \frac{(A_0 + 1)\Gamma_{\lambda 0}}{\det|\sqrt{\lambda}\delta_{\lambda\lambda'} + \Gamma_{\lambda\lambda'}|}. \tag{20}$$

## § 3. Устойчивость стационарного решения

Задача об устойчивости неравновесного стационарного состояния рассматривалась в работах [2, 3]. Мы воспользуемся здесь несколько иным методом.

Положим

$$f_s = f_s(W, x) + \delta f_s(W, x, t), \tag{21}$$

где $\delta f_s(W, x, t)$ — флуктуация функции распределения. При $t = 0$: $\delta f_s = F_s(W, x)$.

Подвергая уравнение (7) одностороннему преобразованию Лапласа, для лапласовского образа $\delta f_s(W, x, p)$ получим, как и в [2, 3], следующее уравнение:

$$p\delta f_s - \hat{L}[\delta f_s] = F_s - \frac{\tau F_a}{1 + p\tau}. \tag{22}$$

Здесь $F_a$ есть начальное значение антисимметричной части функции распределения, а оператор $\hat{L}$ определяется условием

$$\hat{L}[f] = \frac{2\tau W}{3m} \cdot \frac{1}{1 + p\tau} \nabla^2 f + I[f]. \tag{23}$$

Мы не рассматриваем здесь специальный случай $1 + p\tau = 0$. Очевидно, он отвечает обычной особенности, которая дает затухание со временем $\tau(W)$.

Обозначим собственные функции и собственные значения оператора $\widehat{L}$ через $\psi_\mu$ и $\mu$:

$$\widehat{L}[\psi_\mu] = \mu\psi_\mu. \tag{24}$$

Граничные условия, накладываемые на функции $\psi_\mu$, — те же, что и для $f_s(W, x)$. Полюсы функции $\delta f_s$ определяются условием [2]:

$$p = \mu(p). \tag{25}$$

Очевидно, полученное выше стационарное распределение устойчиво при $\operatorname{Re} p < 0$ и неустойчиво при $\operatorname{Re} p > 0$.

В силу (23) и (24) мы имеем

$$\frac{1}{1+p\tau}\nabla^2\psi_\mu + \frac{3m}{2W\tau} I[\psi_\mu] = \frac{3m}{2W\tau}\mu\psi_\mu. \tag{26}$$

Введем обозначение

$$\int\limits_{-L/2}^{+L/2} dx \int\limits_0^\infty dW \frac{3m}{2W\tau}|\psi_\mu|^2 = N \tag{27}$$

и рассмотрим выражение

$$A = \int\limits_{-L/2}^{+L/2} dx\psi_\mu \frac{\partial^2\psi_\mu}{\partial x^2} = -\int\limits_{-L/2}^{+L/2} dx\left|\frac{\partial\psi_\mu}{\partial x}\right|^2 - \\ - \psi_\mu\frac{\partial\psi_\mu}{\partial x}\Big|_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} + \psi_\mu\frac{\partial\psi_\mu}{\partial x}\Big|_{-L/2}^{+L/2}. \tag{28}$$

С учетом (9, а) и (9, б) находим

$$A = -\int\limits_{-L/2}^{+L/2} dx\left|\frac{\partial\psi_\mu}{\partial x}\right|^2 + Y(W)\psi_\mu(W, 0). \tag{29}$$

Комбинируя равенства (26) — (29), получаем

$$\mu N = -\int\limits_{-L/2}^{+L/2} dx\int\limits_0^\infty dW\left\{-\frac{1}{1+p\tau}\left|\frac{\partial\psi_\mu}{\partial x}\right|^2 + \frac{3m}{2W\tau}\psi_\mu I[\psi_\mu]\right\} + \\ + \int\limits_0^\infty dW(1+p\tau)^{-1}Y(W)\psi_\mu(W, 0). \tag{30}$$

При комплексных значениях $p$ оператор $\widehat{L}$ неэрмитов и, следовательно, числа $\mu$ могут оказаться комплексными. Ограничимся пока случаем $p \in \operatorname{Re}$. Тогда и $\mu \in \operatorname{Re}$ и функции $\psi_\mu$ также можно выбрать вещественными. При этом второе слагаемое в фигурных скобках в (30) заведомо отрицательно в силу отрицательной определенности оператора столкновений $I$ в рассматриваемом пространстве функций. При $1+p\tau > 0$ отрицательным оказывается и первое слагаемое[1].

[1] Случай $1+p\tau<0$ в данном контексте неинтересен, ибо он возможен лишь при $p<0$.

Наконец, отрицательно и третье слагаемое в правой части (30); действительно, согласно (11) и (12), оно представляет собой просто специальную форму «интеграла столкновений», описывающего «рассеяние электронов на фотонах».

Таким образом, $\mu < 0$: стационарное состояние рассматриваемой системы устойчиво относительно флуктуаций функции распределения и, следовательно, неизбежно устанавливается со временем из любого начального состояния.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Бонч-Бруевич В. Л. «Физика и техника полупроводников», 3, 1010, 1969.
2. Бонч-Бруевич В. Л. Phys. stat. sol., 33, 911, 1969; «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 5, 98, 1969.
3. Бонч-Бруевич В. Л., Пройкова Я. Г. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 6, 631, 1970.
4. Пройкова Я. Г. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 13, 203, 1972.
5. Бонч-Бруевич В. Л., Пройкова Я. Г. Труды симпозиума по физике и электрическим неустойчивостям в твердых телах. Вильнюс, 1972, стр. 11.
6. Давыдов Б. И. ЖЭТФ, 7, 1069, 1937.
7. Грибников З. С., Мельников В. И. «Физика твердого тела», 7, 1997, 1965.



Поступила в редакцию
28.9 1973 г.



Кафедра
физики полупроводников