Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1975

УДК 53.519.25

Н. Н. БОГОЛЮБОВ (мл.), В. Н. ПЛЕЧКО

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ С ИСТОЧНИКАМИ

Исследован класс модельных систем равновесной статистической физики с положительным взаимодействием вида $J\overset{+}{J}$ и источниками в пределе неограниченной системы. Показано, что взаимодействие приводит к ослаблению источников. Обнаружено отсутствие фазовых переходов определенного типа в рассматриваемых модельных системах. Результаты проиллюстрированы на конкретной модели.

Как известно, значительный прогресс в понимании ряда физических явлений (сверхтекучесть, сверхпроводимость и др.) был достигнут в современной статистической физике благодаря удачно построенным моделям. В настоящее время модельный подход к исследованию квантовых статистических систем общепринят, причем особый интерес представляют решаемые модели. Но, во-первых, число непосредственно решаемых модельных задач невелико, а во-вторых, этим свойством обладают, как правило, лишь простейшие модели, не всегда достаточно хорошо описывающие реальные физические системы.

В то же время, в соответствии с одной из основных концепций статистической механики, физический интерес представляют лишь предельные при $N \to \infty$ характеристики системы (N — число частиц).

В этой ситуации эффективным средством исследования ряда модельных систем является математически строгий подход, позволяющий получить асимптотически точное решение[1] задачи. Впервые такой подход был применен Н. Н. Боголюбовым в работе [1], где дано строгое обоснование более ранних работ по теории сверхпроводимости для случая нулевой температуры $\theta=0$. Впоследствии одним из авторов (Н. Н. Б.) была построена специальная техника исследования такого и других типов задач, охватывающая общий случай $\theta \geqslant 0$ (см., в частности, [2—4]). Эти методы нашли применение при изучении квазиспиновых моделей [5—6], в теории магнетизма [7], при исследовании некоторых моделей ферроэлектриков [8], в теории лазеров [9], а также при изучении целых классов модельных систем, например, при изучении определенного класса модельных задач со взаимодействием бозонного

[1] Т. е. решение, переходящее в точное в термодинамическом пределе $N \to \infty$, $A \to \infty$, $A/N = \mathrm{const}$. Здесь A — аддитивные величины (объем и т. д.).

поля с веществом [10], и в некоторых других задачах статистической механики.

В работах [4—5] изучались в термодинамическом пределе некоторые конкретные модели с положительным взаимодействием без источников, а в работе [11] — модель с источниками, роль которых играют члены, описывающие действие внешнего поля. В данной работе с единой точки зрения рассматривается достаточно широкий класс модельных задач с положительным взаимодействием с источниками. Мы сформулируем и исследуем задачу как математическую, а затем проиллюстрируем полученные результаты на конкретной модели (модифицированная модель Изинга [11]).

Рассмотрим класс модельных гамильтонианов вида:

$$H_N = T_N + NgJ_N\overset{+}{J}_N - N(\overset{*}{\nu}J_N + \nu\overset{+}{J}_N), \quad g > 0. \tag{1}$$

Здесь N — или число частиц, или пропорциональная ему величина, например, объем «ящика», в котором заключена система; g — вещественный параметр взаимодействия, $g>0$; ν и $\overset{*}{\nu}$ — комплексные параметры; $T_N = \overset{+}{T}_N$, J_N и $\overset{+}{J}_N$ — операторы, зависящие параметрически от N. В конкретных моделях T_N обычно описывает «собственно систему», а последнее слагаемое в (1) (источники[1]) — внешнее воздействие на систему (например, действие внешнего магнитного поля в моделях магнетиков). Иногда источники вводят в гамильтониан искусственно для снятия статистического вырождения (квазисредние, [12]).

В соответствии с общими принципами подхода [2], построим для модельного гамильтониана (1) «аппроксимирующий» гамильтониан $H^0(C)$, зависящий от комплексного параметра C:

$$H_N^0(C) = T_N - N(\overset{*}{z}J_N + z\overset{+}{J}_N) - NgC\overset{*}{C}, \tag{2}$$

где $z = \nu - gC$. Отметим, что оператор (2) имеет более простую структуру, чем (1), поскольку не содержит уже слагаемого типа $J\overset{+}{J}$, в частности, он может быть «точнорешаемым» при конечных N, даже если (1) этим свойством и не обладает. При специальном выборе параметра $C = \bar{C}$ (где $\bar{C}$ реализует абсолютный максимум функции $f[H^0(C)]$, см. ниже (17)) и при некоторых дополнительных предположениях докажем асимптотическую (при $N \to \infty$) близость свободных энергий $f = f[H]$ и $f^0 = f[H^0]$ и средних $\langle J \rangle_H$ и $\langle J \rangle_{H^0}$, где

$$f[\mathfrak{A}] = -\frac{\theta}{N} \ln Tre^{-\frac{\mathfrak{A}}{\theta}}, \quad \mathfrak{A} = \overset{+}{\mathfrak{A}}, \tag{3}$$

$$\langle \mathfrak{B} \rangle_{\mathfrak{A}} = \frac{Tr\,\mathfrak{B}e^{-\frac{\mathfrak{A}}{\theta}}}{Tre^{-\frac{\mathfrak{A}}{\theta}}}, \quad \mathfrak{A} = \overset{+}{\mathfrak{A}}. \tag{4}$$

Описанная схема характерна для всего подхода [1—11]. В этой связи следует сказать, что термодинамическая эквивалентность модельного и аппроксимирующего гамильтонианов может исследоваться и непосредственно на уровне операторов Гамильтона и сразу при неогра-

[1] «Источниками» мы называем второе слагаемое в (1); такая терминология используется в некоторых конкретных моделях (см. например, [12]).

ниченном числе частиц [13—15]. В таком подходе приходится иметь дело, в частности, с пространством состояний, на котором действует гамильтониан.

Сформулируем дополнительные условия. Будем предполагать ограниченными следующие средние (при всех N):

$$\langle J_N \rangle_{\overline{H}_N^0} \leqslant M_1, \tag{5}$$

$$\langle K_N \overset{+}{K}_N + \overset{+}{K}_N K_N \rangle_{\overline{H}_N^0} \leqslant 2M^2, \tag{6}$$

где $K_N = \overline{H}_N^0 J_N - J_N \overline{H}_N^0$.

Здесь M_1 и M предполагаются не зависящими от N, а $\overline{C}_N$ — специально выбранное значение параметра C (см. (18), (26)), $\overline{H}_N^0 = H_N^0(\overline{C}_N)$. Условия (5), (6) автоматически выполняются, в частности, если операторы, там фигурирующие, удовлетворяют следующим ограничениям по норме:

$$\| J_N \| \leqslant M_1, \; \| T_N J_N - J_N T_N \| \leqslant M_2, \; \| J_N \overset{+}{J}_N - \overset{+}{J}_N J_N \| \leqslant \frac{M_3}{N}. \tag{7}$$

При этом, используя полученное ниже независимым образом неравенство (37), из (6) находим

$$M = M_2 + M_3 |\nu|. \tag{8}$$

Для дальнейшего удобно ввести специальное обозначение $\widetilde{H}_N$ для H_N при $g = 0$:

$$\widetilde{H}_N = T_N - N(\nu \overset{+}{J}_N + \nu^* J_N). \tag{9}$$

Заметим, кстати, что

$$H_N^0(C) = \widetilde{H}_N(z) - gN|C|^2, \; f[H_N^0(C)] = f[\widetilde{H}_N(z)] - g|C|^2. \tag{10}$$

Будем считать, что гамильтониан (9) имеет достаточно простую структуру, так что соответствующая плотность свободной энергии $\widetilde{f}_N = f[H_N]$ (а вместе с тем и $f[H_N^0]$) существует, может быть вычислена в явном виде[1] и обладает следующим свойством симметрии:

$$\widetilde{f}_N(\nu, \nu^*) = f_N(|\nu|^2) = f_N(r^2), \text{ где } r = |\nu|. \tag{11}$$

Очевидно, можно рассматривать $\widetilde{f}_N$ как четную функцию r, $\widetilde{f}_N(r) = \widetilde{f}_N(-r)$, заданную на всей вещественной оси $(-\infty, +\infty)$. При этом будем предполагать, что $\widetilde{f}_N$ принадлежат к классу дважды непрерывно дифференцируемых во всех точках области определения функций[2] и существует предельная функция $\widetilde{f}_\infty(r) = \widetilde{f}_\infty(-r)$ из того же класса, причем на всяком замкнутом множестве $|r| \leqslant R$, $R > 0$, последовательности $\widetilde{f}_N$, $\widetilde{f}'_N$, $\widetilde{f}''_N$ равномерно сходятся соответственно к f_∞, $(f_\infty)'$, $(f_\infty)''$. Обозначим, в частности, через η_N оценку модуля разности $\widetilde{f}_N$ и $\widetilde{f}_\infty$:

---

[1] Или по каким-либо иным причинам $f[\widetilde{H}_N]$ удобнее для изучения, чем $f[H_N]$ при $g \neq 0$.

[2] Требованиям симметрии и дифференцируемости удовлетворяют, например, функции, представимые в виде ряда $\widetilde{f}(\nu, \nu^*) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n |\nu|^{2n}$.

$$|\tilde{f}_N(r)-\tilde{f}_\infty(r)|\leqslant\eta_N\to 0 \text{ при } N\to\infty. \qquad (12)$$

тметим, также, что из сделанных предположений вытекает равномерная граниченность последовательности $\{\tilde{f}''_N(r)\}$ на замкнутом множестве $|r|\leqslant R$:

$$|\tilde{f}''_N(r)|\leqslant B. \qquad (13)$$

Перечисленные условия на функции $\tilde{f}_N(\nu, \overset{*}{\nu})$ не ограничивают общности рассматриваемой задачи, поскольку являются либо строго доказанными при достаточно естественных предложениях (13), (16), либо выполняются, когда $\tilde{f}_N$ может быть вычислена явно.

Несомненную эвристическую ценность представляет знание следствий, к которым приводит добавление в гамильтониан того или другого слагаемого. В нашем случае в пределе $N\to\infty$ добавление в (9) положительного взаимодействия $gNJ_N\overset{+}{J}_N$ приводит к ослаблению источников (в смысле неравенства (37)), что, в свою очередь, ведет к специальному неравенству для средних (44); в случае же отсутствия источников ($|\nu|=0$) взаимодействие оказывается несущественным при $N\to\infty$.

Вернемся к нашей задаче. Введем обозначение[1]:

$$H^1(C)=H-H^0(C)=Ng(J-C)(\overset{+}{J}-\overset{*}{C}) \qquad (14)$$

и рассмотрим вспомогательный гамильтониан

$$H_t=H^0(C)+tH^1(C). \qquad (15)$$

Для соответствующей свободной энергии непосредственным дифференцированием можно доказать соотношения, не зависящие, кстати, от структуры операторов H° и H^1 [2]:

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}=\frac{1}{N}\langle H^1(C)\rangle_{H_t}, \qquad \frac{\partial^2 f_t}{\partial t^2}\leqslant 0, \qquad (16)$$

отсюда непосредственно следует

$$0\leqslant f_N-f_N^0(C)\leqslant\frac{1}{N}\langle H^1(C)\rangle_{H^0(C)}. \qquad (17)$$

Очевидно, центральная часть неравенств (17) минимальна при выборе C из условия абсолютного максимума функции $f_N^0(C)$, что приводит к комплексному уравнению:

$$C=\langle J_N\rangle_{H_N^0(C)}. \qquad (18)$$

Ниже показано, что (18) всегда имеет единственное и ограниченное по модулю решение, которое мы обозначим $\bar{C}_N$. Полагая в (17) $C=\bar{C}_N$, находим

$$0\leqslant f_N-f_N^0(\bar{C}_N)\leqslant g\,\langle(J-\langle J\rangle_{\bar{H}_N^0})(\overset{+}{J}-\langle\overset{+}{J}\rangle_{\bar{H}_N^0})\rangle_{\bar{H}_N^0}. \qquad (19)$$

Используя далее специальную технику дифференцирования операторной экспоненты и применяя неравенство Гёльдера, можно оценить правую часть (19) через вторые производные от свободной энергии [2]:

---

[1] Индекс N иногда для краткости опускаем.

$$0 \leqslant f_N - f_N^0(\overline{C}_N) \leqslant g\left(-\frac{\partial^2 f^0}{\partial\nu\partial\nu^*}\right) + g\left(-\frac{\partial^2 f^0}{\partial\nu\partial\nu^*}\right)^{2/3}\frac{(2M^2)^{1/3}}{N^{2/3}}, \qquad (20)$$

где $2M^2$ определяется формулой (6) или (8). Специально оговоримся, что в правой части (19) при дифференцировании $f_N^0(\nu, \nu^*; \overline{C}_N)$ параметр $\overline{C}_N$ считается фиксированным. Другими словами, в формуле (19)

$$\frac{\partial^2 f^0}{\partial\nu\partial\nu^*} = \left.\frac{\partial^2 \widetilde{f}(z, \overset{*}{z})}{\partial z \partial \overset{*}{z}}\right|_{z=\nu-g\overline{C}_N}. \qquad (21)$$

В соответствии со сделанными при постановке задачи предположениями относительно функций $\{\widetilde{f}_N\}$ величины (20) ограничены при всех N:

$$\left|\left(\frac{\partial^2 f_N^0}{\partial\nu\partial\nu^*}\right)\right|_{C=\overline{C}_N(\nu,\nu^*)}\Bigg| \leqslant B. \qquad (22)$$

Таким образом, имеем следующую оценку для разности свободных энергий, вычисляемых по модельному и аппроксимирующему гамильтонианам:

$$0 \leqslant f_N - f_N^0(\overline{C}_N) \leqslant \frac{gB}{N} + \frac{g(2M^2B^2)^{1/3}}{N^{2/3}}, \qquad (23)$$

где $2M^2$ определяется формулой (6) или (8). Заметим, что для определенного класса моделей можно вообще не прибегать к помощи вторых производных, а рассмотреть непосредственно правую часть (19) и получить для разности свободных энергий оценку $\sim\frac{1}{N}$ [16].

Следует сказать, что требование ограниченности вторых производных (13), (22) является принципиальным и обусловлено положительностью взаимодействия. В случае отрицательного взаимодействия имеет место неравенство, аналогичное (20) [2], где в правую часть входит

$$\frac{\partial^2 f_N}{\partial\nu\partial\nu^*}, \qquad (24)$$

которая для многих конкретных моделей, представляющих существенный интерес, неограничена в точке фазового перехода при $N\to\infty$. Вместе с тем производная (24) по сравнению с производной (21) «проще» зависит от ν, ν^*, поскольку в (21) есть еще сложная зависимость от ν, ν^* через $C_N(\nu, \nu^*)$. «Нормальная» зависимость f_N'' от ν, ν^* и позволяет в случае отрицательного взаимодействия ($g<0$) получить (специальным образом усредняя аналог неравенства (20)) близость свободных энергий несмотря на неограниченность вторых производных. Но для положительного взаимодействия в случае неограниченности $\partial^2\widetilde{f}_N/\partial\nu\partial\nu^*$ при $N\to\infty$ для некоторых значений параметров, можно привести примеры, когда близости свободных энергий модельной и аппроксимирующей систем вообще нет. В случае же ограниченных $\partial^2\widetilde{f}_N/\partial\nu\partial\nu^*$, когда близость свободных энергий имеет место (23), было бы интересно попытаться обобщить схему работы [2] с целью получить для случая положительного взаимодействия оценку близости f_N и f_N^0, не зависящую от B (22). Однако на этом пути возникают существенные трудности, связанные со сложной зависимостью производных в правой части (20) от ν, ν^*.

Итак, справедлива оценка (23). С другой стороны, учитывая (10) и (12), имеем:

$$|f^0_\infty(C) - f^0_N(C)| \leqslant \eta_N \to 0 \text{ при } N \to \infty. \tag{25}$$

спользуя определение параметров $\bar{C}_N$ и $\bar{C}_\infty$:

$$f^0_N(\bar{C}_N) = \max_{(C)} f^0_N(C), \quad f^0_\infty(\bar{C}_\infty) = \max_{(C)} f^0_\infty(C), \tag{26}$$

и учитывая (23), находим окончательно

$$|f_N - f^0_\infty(\bar{C}_\infty)| \leqslant \varepsilon_N + \eta_N = \varepsilon'_N \to 0 \quad \text{при } N \to \infty. \tag{27}$$

Здесь f_N определяется правой частью (23). Асимптотическая близость вободных энергий, таким образом, доказана.

Ниже нам потребуются некоторые общие свойства функций f и $\tilde{f}$. При этом наряду с ν и ν^* мы будем использовать вещественные независимые переменные r и φ:

$$r = |\nu| = (\nu\nu^*)^{1/2}, \quad r \geqslant 0;$$
$$e^{i\varphi} = (\nu/\nu^*)^{1/2}, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \tag{28}$$

В дальнейшем важную роль будут играть следующие фундаментальные неравенства (свойство выпуклости):

$$-\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} \geqslant 0, \quad -\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \geqslant 0, \tag{29}$$

редставляющие собой разновидность неравенства (16).

В силу четности и непрерывной дифференцируемости функции $\tilde{f}(r)$ имеем

$$\left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\right|_{r=0} = 0. \tag{30}$$

С учетом (29) отсюда немедленно следует:

$$-\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} = \begin{bmatrix} \text{монотонно неубывающая} \\ \text{функция} \end{bmatrix} \geqslant 0. \tag{31}$$

Отметим еще следующие очевидные равенства:

$$\langle J \rangle_H = -\frac{\partial f}{\partial \overset{*}{\nu}} = -\frac{\partial f}{\partial r}\,\frac{e^{i\varphi}}{2},$$
$$\langle J \rangle_{\tilde{H}} = -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \overset{*}{\nu}} = -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\,\frac{e^{i\varphi}}{2}. \tag{32}$$

Рассмотрим теперь уравнение (18), которое удобно записать как уравнение для определения комбинации $\bar{z} = \nu - g\bar{C}$:

$$z + g\left(-\frac{\partial \tilde{f}(|z|)}{\partial \overset{*}{z}}\right) = \nu. \tag{33}$$

Из (33) и (32) видно, что фазы чисел $\bar{z}$, $\bar{C}$ и ν совпадают, в частности, ри вещественных источниках ($\nu = \pm r$) $\bar{z}$ и $\bar{C}$ вещественны. Для определения $\bar{\rho} = |\bar{z}|$ остается уравнение:

$$\rho+\frac{g}{2}\left(-\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\rho}\right)=r, \tag{34}$$

левая часть которого является непрерывной и монотонно возрастающей функцией от ρ (см. (31)); при этом:

$$[\text{левая часть (34)}]=\begin{cases} 0, & \text{при } \rho=0 \\ \geqslant r, & \text{при } \rho=r \end{cases}.$$

Следовательно, справедливы утверждения[1]:

а) уравнение (34) всегда имеет единственное решение $\bar{\rho}(r)$, причем $\bar{\rho}(0)=0$, при $r\geqslant 0$

$$\rho(0)=0 \tag{35}$$

монотонно возрастающая непрерывная функция,

б) выполняются неравенства

$$0\leqslant\bar{\rho}(r)\leqslant r \text{ или } |\bar{z}|\leqslant|\nu|, \tag{36}$$

отсюда и из (5), (18) следует также

$$\begin{gathered} |\bar{C}|\leqslant\min\left\{M_1, \frac{|\nu|}{g}\right\}, \\ \max\{0, |\nu|-gM_1\}\leqslant|\bar{z}|\leqslant|\nu|. \end{gathered} \tag{37}$$

Перейдем к доказательству асимптотической близости производных:

$$-\frac{\partial f_N}{\partial\overset{*}{\nu}}=\langle J_N\rangle_H \text{ и } -\frac{\partial f_\infty^0}{\partial\overset{*}{\nu}}=\bar{C}_\infty. \tag{38}$$

Используя (38) и (32), находим

$$-\frac{\partial^2 f_\infty^0}{\partial r^2}=-\left.\frac{\partial^2\tilde{f}(\rho)}{\partial\rho^2}\right|_{\rho=\bar{\rho}}\left(1+\frac{g}{2}\frac{\partial^2 f_\infty^0}{\partial r^2}\right), \tag{39}$$

следовательно,

$$0\geqslant\frac{\partial^2 f_\infty^0}{\partial r^2}\geqslant-\frac{2}{g}. \tag{40}$$

Из (40) с учетом (27) получаем для функции $\Delta_N(r)=f_\infty^0-f_N$;

$$|\Delta_N(r)|\leqslant\varepsilon_N', \quad \Delta_N''(r)\geqslant-\frac{2}{g}. \tag{41}$$

Отсюда непосредственно следует [3,7]:

$$|\langle J_N\rangle_H-\bar{C}_\infty|\leqslant 2(\varepsilon_N'/g)^{1/2}. \tag{42}$$

С точностью до «с — числа» $H^0(C)$ совпадает с $\tilde{H}(\bar{z}, \overset{*}{\bar{z}})$, где $|\bar{z}|$ удовлетворяет (36). Поэтому, в силу свойства монотонности (31), неравенство (36) приводит к следующему:

$$0\leqslant-\left.\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\rho}\right|_{\rho=\bar{\rho}}\leqslant-\left.\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\rho}\right|_{\rho=r},$$

---

[1] Формулы (29)—(37) справедливы как при $N<\infty$, так и в случае $N=\infty$.

или

$$|\langle J\rangle_{H^0}^{(N)}| \leqslant |\langle J\rangle_{H}^{(N)}|. \tag{43}$$

Переходя к пределу $N\to\infty$ и учитывая (42), имеем еще одну форму проявления свойства ослабления источников (36):

$$|\langle J\rangle_{H}^{(\infty)}| \leqslant |\langle J\rangle_{\bar{H}}^{(N)}|. \tag{44}$$

Как нетрудно видеть, при $\nu=\overset{*}{\nu}=0$ решением уравнения (33), (34) является $\bar{z}=\bar{C}=0$. В соответствии с определением (2) в этом случае $H^{\circ}(\bar{C})=\mathrm{T}$, т. е. в пределе $N\to\infty$ положительное взаимодействие здесь оказывается несущественным при вычислении f_∞ и $(\partial f/\partial\nu)_{N\to\infty}$. Этот результат для некоторых конкретных моделей был получен ранее в работах [4, 5, 11]. Следует отметить, что в отличие от случая отрицательного взаимодействия [2], случай $|\nu|=0$ для рассмотренной выше модели может рассматриваться как в смысле $\lim\limits_{\nu\to 0}\lim\limits_{N\to\infty}$, так и в смысле $\lim\limits_{N\to\infty}\lim\limits_{\nu\to 0}$, т. е. квазисредние [12] здесь совпадают со средними.

В качестве примера модельной задачи, входящей в рассмотренный выше класс, приведем одномерную модель Изинга с положительным дальнодействием во внешнем поле, подробно исследованную в работе [11]. Гамильтониан этой задачи имеет вид

$$H_N = G\sum_{i=1}^{N} S_i S_i + 1 + \frac{g}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} S_i S_j - h_0\sum_{i=1}^{N} S_i, \tag{45}$$

где

$$S_{N+1} = S_1, \quad S_i = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \; g>0.$$

Очевидно, это выражение приводится к форме (1) при

$$J=\overset{+}{J}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_i;$$

при этом выполняются условия (7), где

$$M_1=0,\; M_{2,3}=0;\; \overset{*}{\nu}=\nu=\frac{h_0}{2}.$$

В области $\theta\geqslant\theta_1>0$, $-\infty<h_0<+\infty$ выполнены условия симметрии и дифференцируемости, налагаемые на $\tilde{f}_N(h_0)$, которая может быть вычислена явно.

Неравенство (36) означает, что переход от $\tilde{H}_N(h_0)$ к $H_N(h_0)$ в пределе $N\to\infty$ сводится к замене h_0 эффективным полем $\bar{h}=h(\bar{h}_0)$, $|\bar{h}|\leqslant|h_0|$. Как и следовало ожидать из физических соображений, это приводит в соответствии с (44) к размагничиванию цепочки ($\langle J\rangle$ имеет физический смысл средней намагниченности).

В заключение сделаем несколько замечаний.

Центральными результатами этой работы являются оценки (27), (42), неравенства (36), (40), (44) и утверждение (35). Интересно, что столь конкретные результаты получены сразу для целого класса модельных систем (1). При этом мы существенно использовали положительность взаимодействия ($g>0$). В случае $g<0$ левая часть уравнения, аналогичного (34), вообще говоря, не монотонна, вследствие чего это уравнение может иметь несколько решений, а утверждение (35) — не иметь места; неравенство (40) здесь нарушается и т. д. Тем не менее можно ожидать, что подход с общих позиций и к таким задачам окажется полезным.

Физический смысл, который могут иметь неравенства (36), (44), уже показан. Важные выводы следуют и из утверждения (35). Единственность и непрерывность решения $\vec{C}_\infty$ вдоль любой непрерывной кривой на плоскости ν означает, что если модель (9) не имеет фазового перехода, при котором появляется «спонтанная упорядоченность» ($\lim\limits_{\nu\to 0}\lim\limits_{N\to\infty}\langle J\rangle=0$), то и модель с положительным взаимодействием (1) не дает такого фазового перехода. Эти соображения относятся самым непосредственным образом и к упомянутой модели Изинга с дальнодействием.

Авторы искренне признательны В. К. Федянину, И. Г. Бранкову и В. А. Загребнову за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н. К вопросу о модельном гамильтониане в теории сверхпроводимости. Препринт ОИЯИ, Р—511, Дубна, 1960.
2. Боголюбов Н. Н. (мл.). «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 1, 1966.
3. Боголюбов Н. Н. (мл.). ДАН СССР, **168**, 4, 1966.
4. Боголюбов Н. Н. (мл.). Препринты ИТФ-68—65, ИТФ-68—67. Киев, 1968.
5. Bogoljubov N. N. (jr.), Shumovsky A. S. Phys. Lett., **35A**, 380, 1971.
6. Шумовский А. С. Препринт ИТФ-71—56Р. Киев, 1971.
7. Бранков И. Г. Препринт ОИЯИ, Р4—7000, Дубна, 1973.
8. Курбатов А. М., Плечко В. Н. Сообщение ОИЯИ, Р4—8403, Дубна, 1974.
9. Бранков И. Г., Загребнов В. А., Тончев Н. С. Препринт ОИЯИ, Р4—7735, Дубна, 1974.
10. Боголюбов Н. Н. (мл.), Плечко В. Н. Препринт ОИЯИ, Дубна, 1975.
11. Лапушкин С. С., Плечко В. Н. Препринт ИТФ-73—149Р, Киев, 1973.
12. Боголюбов Н. Н. Препринт ОИЯИ, Р—1451, Дубна, 1963; Избранные труды, т. 3. Киев, 1971.
13. Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты. М., 1971.
14. Haag R., Hugenholtz N. M., Winnik M. Comm. Math. Phys., **5**, 215, 1967.
15. Петрина Д. Я. «Теоретическая и математическая физика», **4**, 389, 1970.
16. Лапушкин С. С. Сообщения ОИЯИ, Р4—7738, Дубна, 1974.

Поступила в редакцию
12.10 1973 г.

Кафедра
квантовой статистики