

УДК 538.566 : 261.371.165

Н. А. МАХМУТОВ

### РАССЕЯНИЕ РАДИОВОЛН В ПЛОСКОМ ЛИНЕЙНОМ СЛОЕ

Рассмотрено решение лучевого уравнения методом возмущений для плоско-слоистой линейной модели ионосферы. На основе решения первого приближения для изометрических и для анизометрических гауссовских случайных неоднородностей с использованием ЭВМ рассчитаны моменты второго порядка направления выхода волны из ионосферы, установлена их функциональная связь со средней геомагнитной широтой и азимутом радиотрассы.

В литературе хорошо известно решение лучевого уравнения методом возмущений для однородной в среднем рассеивающей среды ([1—2]). Однако полученные при этом результаты, хотя и имеют большую общность и практическую значимость, не могут быть непосредственно применены к ионосферному распространению, так как для ионосферы существенна регулярная рефракция.

В данной работе методом возмущений решено лучевое уравнение для плоскослоистой линейной модели ионосферы. На основе решения первого приближения для изометрических и для анизометрических гауссовских случайных неоднородностей диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  рассчитаны флуктуации сферических углов около невозмущенного направления выхода луча из слоя и их взаимная корреляционная функция, установлена их функциональная зависимость от формы и ориентации случайных неоднородностей  $\epsilon$ . Поскольку ориентация ионосферных неоднородностей  $\epsilon$  определяется направлением вектора напряженности геомагнитного поля [3], полученные зависимости определяют связь моментов второго порядка направления выхода волны из ионосферы со средней геомагнитной широтой и азимутом радиотрассы.

#### Решение лучевого уравнения

Для плоского линейного слоя ( $z \geq 0$ ) средняя диэлектрическая проницаемость равна

$$\langle \epsilon \rangle = \epsilon_0 = 1 - \frac{z}{z_0}, \quad (1)$$

а флуктуации  $\varepsilon_1 = \varepsilon - \varepsilon_0$ , как обычно, считаются малыми, т. е.

$$\frac{\sqrt{\langle \varepsilon_1^2 \rangle}}{\varepsilon_0(z)} = v \ll 1 \quad (2)$$

для любых  $z \leq z_{\text{отр}}$ . Поскольку  $\varepsilon_0$  достигает минимального значения в точке отражения:

$$\varepsilon_0(z_{\text{отр}}) = \sin^2 \vartheta_{00}, \quad (3)$$

где  $\vartheta_{00}$  — угол падения луча на слой, условие (2) малости параметра  $v$  накладывает ограничение на угол падения:

$$\sin^2 \vartheta_{00} \gg \sqrt{\langle \varepsilon_1^2 \rangle}. \quad (4)$$

В этом случае удобнее использовать иную, чем в [1 и 2], форму лучевого уравнения. Выражая декартовы компоненты лучевого вектора  $\mathbf{l}$  через сферические:

$$\begin{aligned} l_x &= \sin \vartheta \cos \varphi, \\ l_y &= \sin \vartheta \sin \varphi, \\ l_z &= \cos \vartheta \end{aligned} \quad (5)$$

и подставляя (5) в уравнение

$$\frac{d(n\mathbf{l})}{d\sigma} = \nabla n, \quad n = \sqrt{\varepsilon}, \quad (6)$$

получим эквивалентную форму лучевого уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{d\sigma} &= (\mathbf{m}, \nabla \ln n), \\ \sin \vartheta \frac{d\varphi}{d\sigma} &= (\mathbf{p}, \nabla \ln n), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{p}$  — единичные векторы сопровождающего трехгранника траектории. Таким образом, изменение полярного угла  $\vartheta$  определяется проекцией вектора  $\nabla \ln n$  на главную нормаль траектории  $\mathbf{m}$ , а изменение азимута  $\varphi$  — проекцией  $\nabla \ln n$  на бинормаль  $\mathbf{p}$ .

Выберем систему координат  $x y z$  таким образом, чтобы падающий на полупространство  $z \geq 0$  луч лежал в плоскости  $xz$ . Будем искать решения уравнений (7) в виде рядов по степеням  $v$ :

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_0 + \vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots \\ \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

При этом

$$\ln n = \frac{1}{2} \ln \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon_0} + \dots \quad (9)$$

Кроме того, в первом приближении  $d/d\sigma \cong d/d\sigma_0$ , где  $d/d\sigma_0$  — производная по невозмущенной траектории. Подставляя (8), (9) в уравнение (7) и приравнявая группы членов одинакового порядка малости, получим уравнения для  $\vartheta_0$ ,  $\vartheta_1$ ,  $\varphi_1$ .

Уравнение для  $\vartheta_0$  дает классический закон Снелиуса:

$$\sqrt{\varepsilon_0} \sin \vartheta_0 = \sin \vartheta_{00}. \quad (10)$$

Уравнения первого приближения при начальных условиях

$\vartheta_1|_{\sigma_0=0} = \varphi_1|_{\sigma_0=0} = 0$  дают:

$$\vartheta_1 = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_0}} \int_0^{\sigma_0} \sqrt{\varepsilon_0} \left[ \cos \vartheta_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right) - \sin \vartheta_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right) \right] d\sigma_0, \quad (11)$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\sigma_0} \frac{1}{\sin \vartheta_0} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right) d\sigma_0.$$

Для некоторых статистических моделей флуктуаций  $\varepsilon_1$  моменты второго порядка направления луча  $\langle \vartheta_1^2 \rangle$ ,  $\langle \varphi_1^2 \rangle$ ,  $\langle \vartheta_1 \varphi_1 \rangle$  могут быть рассчитаны в явном виде.

### Рассеяние на изометрических неоднородностях

Рассмотрим рассеяние на изометрических неоднородностях с гауссовской функцией корреляции:

$$B(\tau_1, \tau_2) = \langle \varepsilon_1(\tau_1) \varepsilon_1(\tau_2) \rangle = \langle \varepsilon_1^2 \rangle \exp \left\{ -\frac{|\tau_2 - \tau_1|^2}{a^2} \right\}. \quad (12)$$

Будем считать, что  $\varepsilon_1$  представляет статистически однородный процесс:  $\langle \varepsilon_1^2 \rangle = \text{const}$  и  $a = \text{const}$ . В этом случае вычисления угловых моментов дают следующие результаты:

$$\langle \vartheta_1^2 \rangle = \langle \varphi_1^2 \rangle \sin^2 \vartheta_{00} = \sqrt{\pi} \langle \varepsilon_1^2 \rangle \frac{z_0}{a} \ln \left( \frac{1 + \cos \vartheta_{00}}{1 - \cos \vartheta_{00}} \frac{\sin \vartheta_0}{\sin \vartheta_{00}} \right), \quad (13)$$

$$\langle \vartheta_1 \varphi_1 \rangle = 0.$$

Введем локальную систему координат  $X'Y'Z'$ , в которой полярная ось  $OZ'$  совпадает с невозмущенным лучом  $l_0(\sigma)$ , а  $OY' \parallel OY$ . В этой системе рассеяние характеризуется направляющими косинусами  $S_x$  и  $S_y$ , флуктуации которых равны

$$\langle s_x^2 \rangle = \langle \vartheta_1^2 \rangle, \quad (14)$$

$$\langle s_y^2 \rangle = \langle \varphi_1^2 \rangle \sin^2 \vartheta_0.$$

Из (13) и (14) следует, что  $\langle s_x^2 \rangle = \langle s_y^2 \rangle \cdot \varepsilon_0(z)$ . Таким образом, вследствие регулярной рефракции рассеяние на изометрических неоднородностях будет анизотропным:

$$d = \sqrt{\frac{\langle s_y^2 \rangle}{\langle s_x^2 \rangle}} \frac{1}{\varepsilon_0}, \quad (15)$$

причем  $d_{\text{max}} = 1/\sin \vartheta_{00}$  в точке отражения.

В точке выхода луча из слоя ( $\vartheta_{0 \text{ вых}} = \pi - \vartheta_{00}$ ) рассеяние будет изотропным ( $d = 1$ ), при этом

$$\langle \vartheta_1^2 \rangle_{\text{вых}} = \langle \varphi_1^2 \rangle_{\text{вых}} \sin^2 \vartheta_{00} = 2\sqrt{\pi} \langle \varepsilon_1^2 \rangle \frac{z_0}{a} \ln \left( \text{ctg} \frac{\vartheta_{00}}{2} \right). \quad (16)$$

## Рассеяние на анизотрических неоднородностях

Известно, что в газовой плазме при наличии магнитного поля существенно различие коэффициентов диффузии вдоль и поперек поля. Это приводит к вытягиванию ионосферных неоднородностей  $\epsilon$  вдоль направления магнитного поля Земли [3]. Для исследования особенностей рассеяния радиоволн на анизотрических неоднородностях ионосферы в первом приближении можно взять функцию корреляции в виде

$$B(\tau_1, \tau_2) = \langle \epsilon_1^2 \rangle \exp \left\{ - \frac{(\tau_2 - \tau_1) A(\tau_2 - \tau_1)}{a^2} \right\}, \quad (17)$$

т. е. поверхность равной корреляции является эллипсоидом с положительно определенной симметричной матрицей  $A = ((a_{ik}))$ . При этом считается, что  $\langle \epsilon_1^2 \rangle = \text{const}$ ,  $a = \text{const}$ ,  $a_{ik} = \text{const}$ .

В соответствии с [3] рассмотрим рассеяние на эллипсоидах вращения с отношением осей  $e = \frac{\tau_{\parallel}}{\tau_{\perp}} \cong 10$ . В этом случае  $a_{ik}$  зависят только от двух переменных: средней геомагнитной широты радиотрассы  $\alpha$  и ее азимута  $\beta$  относительно плоскости магнитного меридиана. При этом  $\beta$  отсчитывается от направления на экватор по часовой стрелке (для северного магнитного полушария отсчет от направления  $N-S$ , для южного —  $S-N$ ). Для этого практически интересного случая моменты второго порядка направления выхода луча из слоя могут быть получены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \langle \vartheta_1^2 \rangle_{\text{вых}} &= \sqrt{\pi} \langle \epsilon_1^2 \rangle \frac{z_0}{a} f_1(\vartheta_{00}, \alpha, \beta), \\ \langle \varphi_1^2 \rangle_{\text{вых}} &= \sqrt{\pi} \langle \epsilon_1^2 \rangle \frac{z_0}{a} f_2(\vartheta_{00}, \alpha, \beta), \\ \langle \vartheta_1 \varphi_1 \rangle_{\text{вых}} &= \sqrt{\pi} \langle \epsilon_1^2 \rangle \frac{z_0}{a} f_3(\vartheta_{00}, \alpha, \beta), \end{aligned} \quad (18)$$

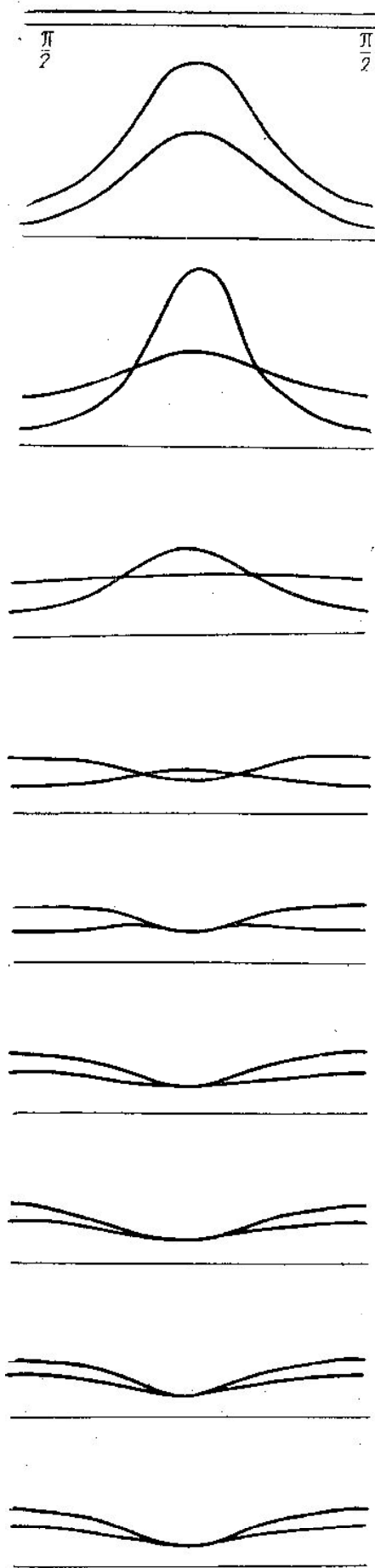
причем интегральные функции  $f_1-f_3$  имеют удобный для программирования на АЛГОЛЕ вид.

В области  $\vartheta_{00} \in \left[ \vartheta_{00 \text{ min}}, \frac{\pi}{2} \right]$ ,  $\alpha \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$  функции  $f_1$  и  $f_2$  периодичны по  $\beta$  с периодом  $\pi$ , а  $f_3$  — с периодом  $2\pi$  и нечетна относительно  $\beta = 0$ . Поэтому достаточно рассчитать  $f_1-f_3$  в области  $\beta \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ .

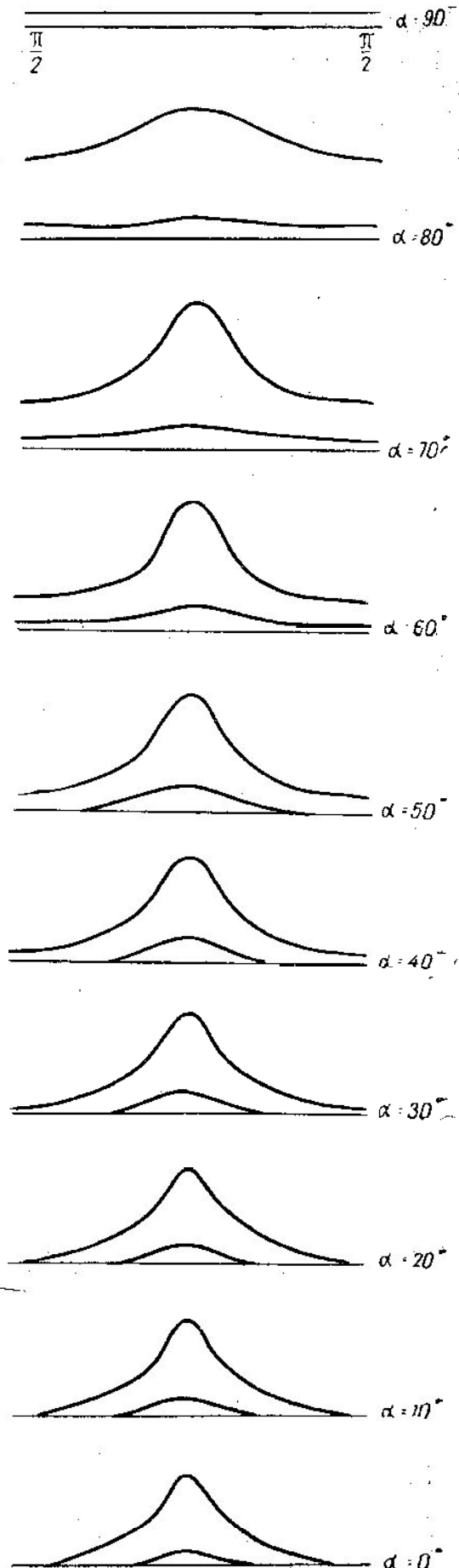
Для каждой из функций  $f_1-f_3$  получено десять машинных графиков для геомагнитных широт  $\alpha = 0, 10, 20, \dots, 90^\circ$ . На каждом графике построены кривые зависимостей от аргумента  $\beta$  в области  $[-\pi/2, \pi/2]$  для восьми значений параметра  $\vartheta_{00} = 10, 20, 30, \dots, 80^\circ$ . На рис. 1—2 в качестве примера представлены кривые для  $\vartheta_{00} = 10$  и  $\vartheta_{00} = 20^\circ$ , причем в перпендикулярном магнитному меридиану направлении значения  $f_1-f_3$  убывают с возрастанием  $\vartheta_{00}$ :

$$\left| f_{1,2,3} \left( 20^\circ, \alpha, \pm \frac{\pi}{2} \right) \right| < \left| f_{1,2,3} \left( 10^\circ, \alpha, \pm \frac{\pi}{2} \right) \right| \quad (19)$$

для любых  $\alpha$ .



$f_1(\nu_{00}, \alpha, \beta)$   
*Масштаб: 1 см = 50*



$f_2(\nu_{00}, \alpha, \beta)$   
*Масштаб: 1 см = 2000*

Рис. 1

Полученные результаты относятся к решению прямой задачи теории рассеяния: рассчитаны моменты второго порядка направления прихода радиоволн для определенных статистических моделей среды. Однако на основании полученных результатов, пользуясь экспериментально измеренными  $\langle \vartheta_1^2 \rangle_{\text{ВЫХ}}$ ,  $\langle \varphi_1^2 \rangle_{\text{ВЫХ}}$  и  $\langle \vartheta_1 \varphi_1 \rangle_{\text{ВЫХ}}$ , можно оценить такие

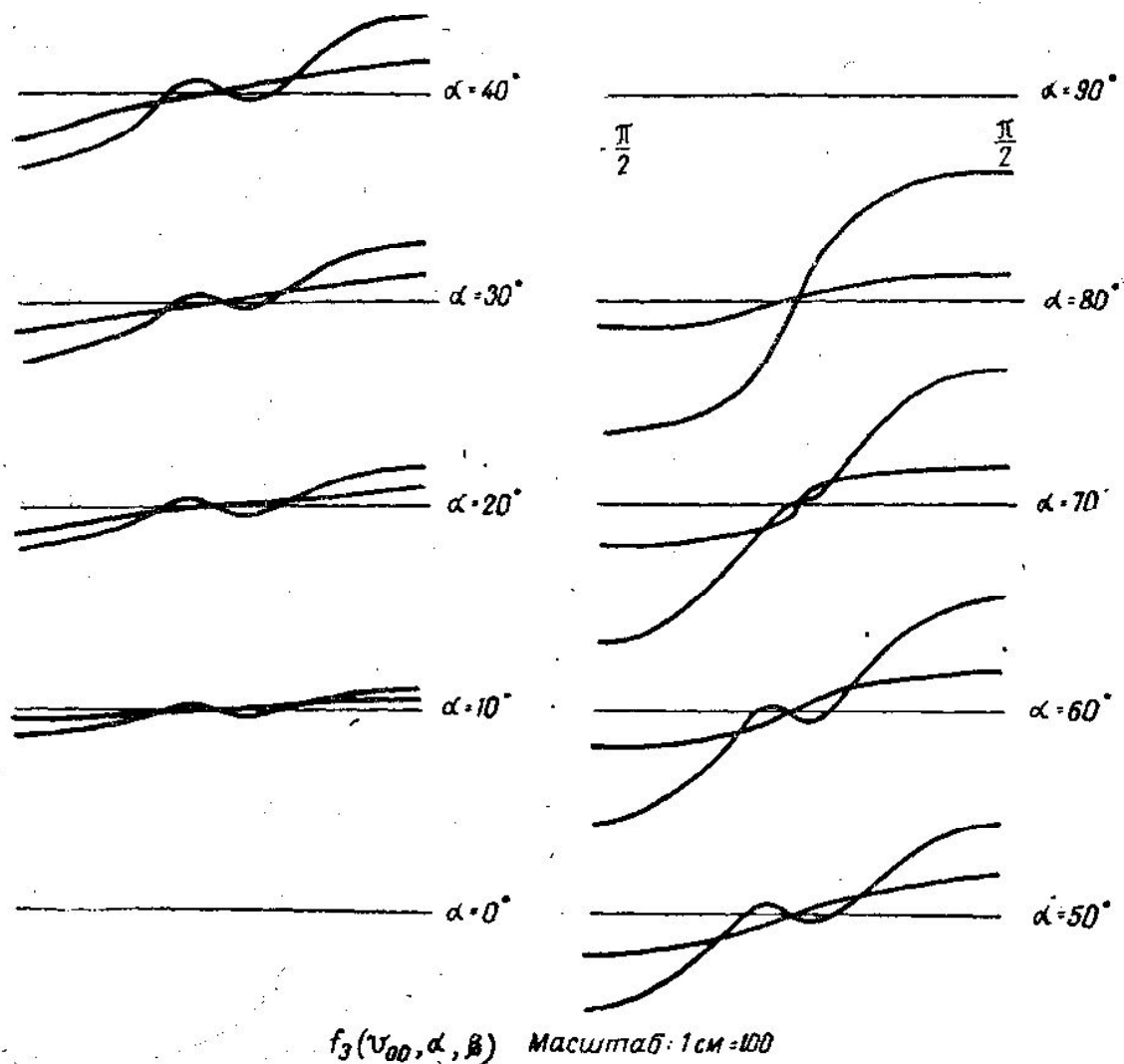


Рис. 2

параметры случайных неоднородностей ионосферы, как  $\langle \epsilon_1^2 \rangle$ ,  $a$ ,  $e$ , т. е. решить в некоторой степени и обратную задачу.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., 1967.
2. Кравцов Ю. А., Фейзулин З. И. «Радиотехника и электроника», 16, 1971.
3. Микротан С. Ф., Кушнаревский Ю. В. В сб.: «Ионосферные исследования», № 12, 1964.

Поступила в редакцию  
30.7 1973 г.

Кафедра  
волновых процессов