

УДК 621.372.43

И. И. МИНАКОВА, А. Г. ФЕДОСЕЕВ

## НЕРЕЗОНАНСНЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА АВТОГЕНЕРАТОР С ЖЕСТКИМ ПРЕДЕЛЬНЫМ ЦИКЛОМ

Теоретически рассчитан при некоторых упрощающих предположениях спектр колебаний автогенератора с «жестким» предельным циклом при нерезонансном параметрическом или силовом воздействии гармонического сигнала. Рассмотрено изменение спектра при изменении частоты воздействия вне полос кратной синхронизации. Показано, что установление синхронного режима при кратных воздействиях происходит только за счет увеличения частоты автогенератора, без гашения автоколебаний. Эксперимент, проведенный в диапазоне радиочастот при кратностях воздействия  $n=2$  и  $n=4$ , качественно хорошо подтверждает выводы теории.

### Постановка задачи

Развитие радиофизики привело к повышению интереса к много-частотным режимам работы неавтономных автогенераторов. Это вызывает необходимость более подробного рассмотрения механизма установления синхронных режимов таких генераторов, особенно при нерезонансных воздействиях. В ряде работ [1—5] рассмотрен режим биений томсоновского генератора вблизи полосы синхронизации при резонансном гармоническом воздействии. При этом показано, что в установлении синхронного режима даже при наличии полигармонического спектра колебаний основную роль играет квазилинейный механизм — гашение автоколебаний [1, 2]. В релаксационном же генераторе, при большой нелинейности системы, преобладающую роль в установлении синхронного режима играет существенно нелинейный механизм — увлечение частоты автогенератора [2], приводящее к появлению в спектре автоколебания новых спектральных составляющих. При кратных силовых и параметрических воздействиях на автогенератор, при модуляции его отрицательной проводимости механизм синхронизации существенно нелинеен даже для томсоновского генератора. Установление режима синхронизации возможно только путем увлечения собственной частоты автогенератора.

Уравнение движения автогенератора (рис. 1) в случае гармонического силового воздействия будет иметь вид

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + 2S(x_\tau)\dot{x}_\tau + \omega_0^2 x + f(x)x = P_0 \cos npt. \quad (1)$$

В случае воздействия на реактивный параметр:

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + 2S(x_\tau) \dot{x}_\tau + \omega_0^2(1 + m_1 \cos 2pt) x + f(x) x = 0. \quad (2)$$

В случае модуляции отрицательной проводимости:

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + 2S(x, m_2 \cos npt) \dot{x} + \omega_0^2 x + f(x) x = 0, \quad (3)$$

где  $2S(x_\tau)$  — приведенная крутизна характеристики активного элемента,  $f(x)$  — нелинейная часть эффективной характеристики реактивного элемента, входящего в колебательную систему проводимости  $Y(\omega, x, t)$ ,  $\tau$  — время запаздывания в цепи обратной связи. Проводимость  $Y(\omega, x, t)$  в одночастотном режиме аппроксимируется проводимостью эквивалентного колебательного контура [6]. В предположении квазилинейности и квазиконсервативности автоколебательной системы движение для (1) при  $n > 1$  ищется в виде

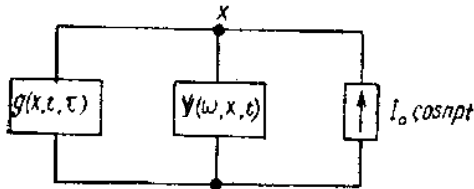


Рис. 1. Уравнение движения автогенератора

$$x = x_s + x_v = A \sin(pt - \varphi) + \lambda \cos npt, \quad \lambda = P_0/n^2 p^2 - \omega_0^2. \quad (4)$$

Для (2) и (3)  $\lambda = 0$ .

Укороченные уравнения для (1), (2), (3) запишем в общем виде:

$$\begin{cases} \dot{A} = -\delta A - \bar{S}(A, \lambda) A \cos \theta + K(A, \lambda, m_1, m_2) \cos N \xi, \\ \dot{\varphi} = \Delta(A, \theta) - \Delta_0(A, \theta, m_1, m_2, \lambda) \sin N \xi. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $\theta = p\tau$  — угол пролета,  $\Delta(A, \theta) = p - \omega_g(A, \theta)$ ,  $\omega_g(A, \theta)$  — собственная частота автогенератора [[7, 8],  $\Delta_0$  — полуширина полосы синхронизации,  $\xi = \varphi - \varphi_0$ ,  $\varphi_0 = \text{const}$ .

### Спектр биений

Рассмотрим спектр колебаний при  $|\Delta| > \Delta_0$  для случая автоколебательной системы с жестким предельным циклом: ограничения, связанные с этим, впервые использованы в работах [9—11]. Это практически наиболее важный случай.

Условия жесткости предельного цикла автогенератора [1, 2] имеют вид

$$|\delta + \bar{S}(A_{0\tau} + \Delta A) \cos \theta| \gg \Delta_0, \quad \Delta A \sim A_{0\tau}, \quad (7)$$

$$|\delta + \bar{S}(A_{0\tau} + d) \cos \theta| \sim \Delta_0, \quad d \ll A_{0\tau}. \quad (8)$$

Выполнение условия (7) возможно только для пролетных углов, близких к оптимальным. При значительных отклонениях пролетных углов от оптимальных значений предельный цикл сильно смягчается [7—8] и условие (7) нарушается. Если условия (7) и (8) выполняются, то влиянием внешнего воздействия на амплитуду автоколебаний в первом приближении можно пренебречь и положить  $A = A_{0\tau}$  [7—8].

Тогда, интегрируя (6) для режима биений ( $|\Delta| > \Delta_0$ ), имеем

$$\varphi = \frac{2}{N} \arctg \left( \beta \frac{N \Omega t^*}{2} \right) \pm \frac{\pi}{2N} + \varphi_0. \quad (9)$$

Здесь знаки  $\pm$  для  $\Delta \cong 0$  соответственно,  $\Omega = \sqrt{\Delta^2 - \Delta_0^2}$  — частота биений, не зависящая от  $N$ ;  $t^* = t - t_0$ ;  $t_0 = \frac{1}{N\Omega} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\sigma^2}}{|\sigma|} \sigma = \frac{\Delta_0}{\Delta}$ ;  $\beta = \sqrt{\frac{1-|\sigma|}{1+|\sigma|}}$  — параметр неравномерности изменения фазы  $\varphi$  во времени.

Этот параметр меняется от единицы до нуля при уменьшении расстройки. Чем меньше  $\beta$ , тем неравномерней меняется фаза в течение периода биений.

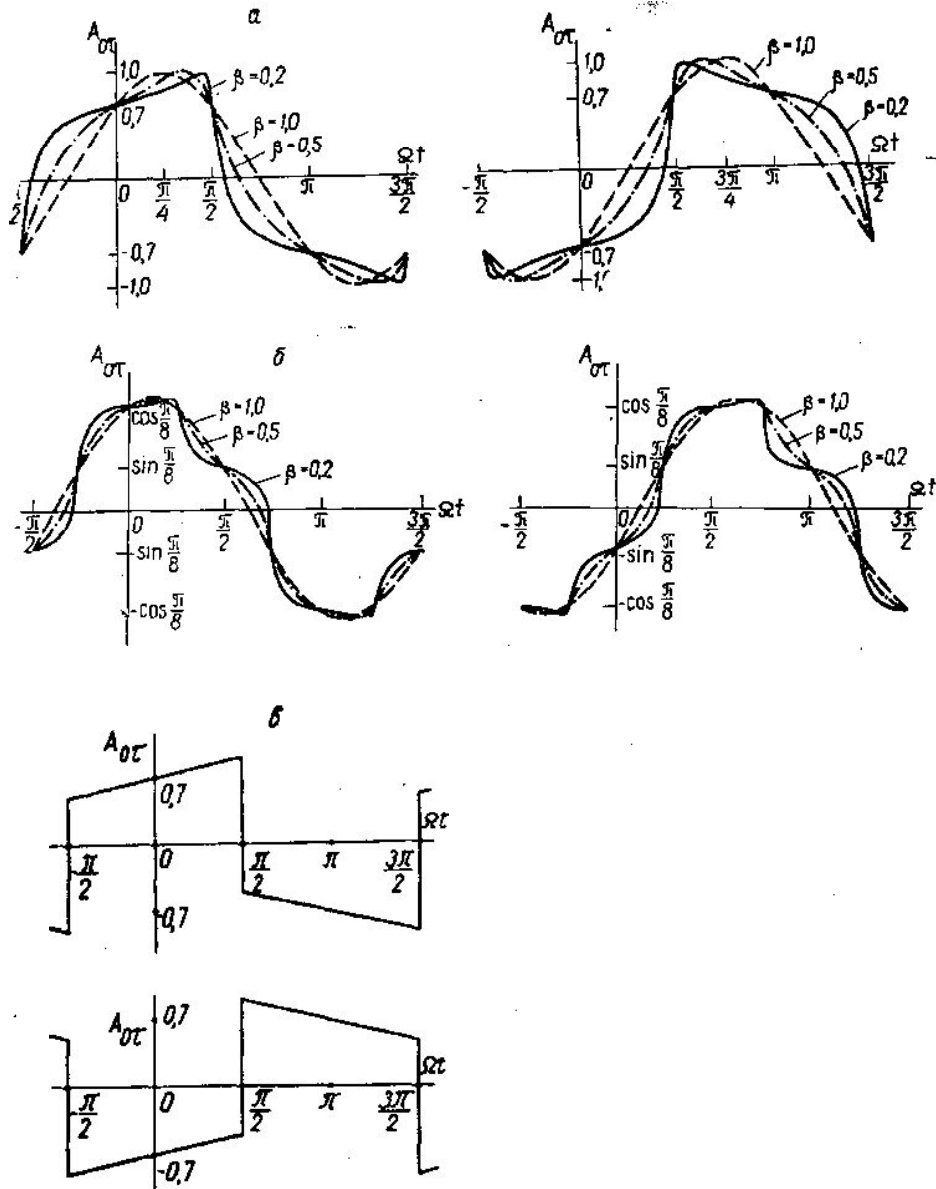


Рис. 2. Графики зависимости переменных Ван-дер-Поля от времени: а — для  $N=2$ , б — для  $N=4$ , в — кусочно-линейная аппроксимация переменных Ван-дер-Поля для  $N=2$  (прямые имеют тангенс наклона, равный  $\beta$ )

Переменные Ван-дер-Поля  $a = A_{0\tau} \cos \varphi$  и  $b = A_{0\tau} \sin \varphi$  — это сложные функции времени (рис. 2, а и б), и разложить их в ряд Фурье удалось только в случае  $N=1$  [1—2]. При  $N=2$  в работах [12—13] построена огибающая биений. В [12] проведено численное интегрирование укороченных уравнений и получен спектр для значения  $\sigma=0,8$ . В [9] спектр получен путем разложения по малому параметру  $\sigma$  с учетом членов до  $\sigma^4$  методом, предложенным в [10]. Ни одно из приведенных выше исследований спектра биений не позволяет проследить измене-

ние спектра при  $|\sigma| \rightarrow 1$ , что особенно важно для выяснения механизма синхронизации.

Проведем кусочно-линейную аппроксимацию переменных  $a$  и  $b$  (рис. 2,  $\varepsilon$ ) и разложим их в ряд Фурье. Такая аппроксимация наиболее сильно искажает высокочастотные составляющие спектра и слабо влияет при достаточно малых  $\beta$  ( $\beta \leq 0,2$ ) на низкочастотные составляющие. При  $N=2$ ,  $\varphi_0=0$   $x_s$  можно записать в виде

$$x_s = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin \left( \omega^* t^* \mp 2k \Omega t^* \mp \frac{\pi}{4} \right) + B_k \sin \left( \omega^* t^* \pm 2(k+1) \Omega t^* \mp \frac{\pi}{4} \right), \quad (10)$$

где

$$A_k = A_{0\tau} \alpha_k \left( 1 + \frac{\beta}{2k+1} \right), \quad B_k = A_{0\tau} \alpha_k \left( 1 - \frac{\beta}{2k+1} \right),$$

$$\alpha_k = \frac{2}{\pi(2k+1)} (-1)^k, \quad \omega^* \approx \omega_g(A_{0\tau}) + \frac{1}{2} \frac{\Delta_0^2}{\Delta} \text{ — частота автоколебаний.}$$

Верхние знаки для  $\Delta > 0$ , нижние —  $\Delta < 0$ . Амплитуды спектральных составляющих при стремлении расстройки к границе синхронного режима не обращаются в нуль, а стремятся к постоянным значениям. Частоты всех спектральных составляющих стремятся к увлекаемой частоте генератора  $\omega^*$  и на границе полосы синхронизации совпадают с ней:

$$\lim_{|\sigma| \rightarrow 1} \omega^* = p \quad \lim_{|\sigma| \rightarrow 1} x_s = A_{0\tau} \sin \left( pt \mp \frac{\pi}{4} \right).$$

Этот результат справедлив для любой из задач (1), (2), (3). В отличие от силового воздействия на основном тоне [6, 7] здесь в спектре биений нет частоты  $p$  и нет гашения всех гармоник на границе полосы синхронизации.

Аналогичный расчет можно провести для любого  $N > 1$  и любого  $\varphi_0$ . В спектре по-прежнему не будет спектральной составляющей частоты  $p$ , так как

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} d\Omega t = 0. \quad (11)$$

### Топологическое исследование на плоскости переменных Ван-дер-Поля

На рис. 3 представлены фазовые портреты стационарного режима биений на плоскости переменных Ван-дер-Поля для  $N=1, 2, 4$ . Для построения фазовых портретов используется уравнение (9). В стационарном режиме биений для автоколебательной системы на плоскости  $ab$  существует устойчивый предельный цикл [12]. Начало координат является неустойчивым фокусом.

В случае силового воздействия на основном тоне [1, 2] разложение Фурье для переменных Ван-дер-Поля имеет постоянный член. Следовательно, в системе есть колебание частоты воздействия  $p$ . Поэтому вектор результирующего колебания ОК (рис. 3,  $a$ ) складывается из векторов вынужденного колебания ОР и собственного колебания OL.

На рис. 3, *a* окружность *c* — результирующий предельный цикл, окружность *d* — предельный цикл автогенератора. Когда расстройка достаточно далека от границы полосы синхронизации, вынужденный компонент **ОР** мал и окружности *c* и *d* совпадают. По мере приближения расстройки к границе синхронного режима **ОР** увеличивается, а поскольку система жестко удерживает амплитуду  $A_0$ , предельный цикл автогенератора *d* смещается вниз по оси *b*. Амплитуда автоколебаний

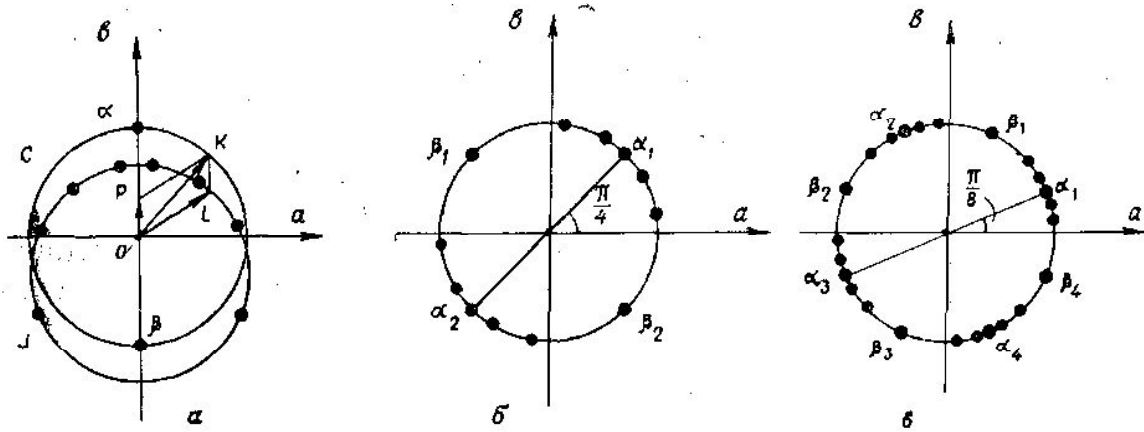


Рис. 3. Фазовые портреты стационарного режима биений: *a* — для  $N=1$ , *b* — для  $N=2$  и *в* — для  $N=4$

( $|OL|$ ) периодически меняется от минимального значения при совпадении фаз вынужденного и собственного компонента до максимального значения в противофазном состоянии. Изображающая точка автоколебательного процесса движется по предельному циклу неравномерно. Эта неравномерность нарастает по мере приближения расстройки к границе синхронного режима. На рисунках точки на окружности *d* соответствуют положению вектора **OL** через равные промежутки времени. Из рис. 3, *a* видно, что движение изображающей точки медленное при состоянии, близком к синфазному, и быстрое в состоянии, близком к противофазному. В момент наступления синхронного режима ( $\Delta = \Delta_0$ )  $|OR| = A_{от}$ , окружность *d* коснется начала координат, которое при этом из неустойчивого фокуса превращается в устойчивый узел.

Изображающая точка приходит в точку *o*, предельный цикл исчезает (автоколебания гасятся). Автоколебательная система переходит в потенциально-автоколебательный режим, и в диссипативной, сильно регенерированной системе существуют только вынужденные колебания частоты  $p$ . Вектор вынуждающего компонента **ОР** приходит либо в точку  $\alpha$ , либо в точку  $\beta$  в зависимости от знака расстройки  $\Delta$ .

Иная картина наблюдается в случае кратных и параметрических воздействий на автогенератор. Переменные Ван-дер-Поля (см. рис. 2*a, б*) не имеют постоянной составляющей (11). Следовательно, в системе нет вынужденного движения частоты  $p$ . Для  $N=2$  предельный цикл представляет собой окружность радиуса  $A_0$  (рис. 3, *б*). Здесь изменение расстройки скажется только на равномерности движения изображающей точки по предельному циклу. Движение медленное возле точек  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и быстрое возле  $\beta_1, \beta_2$  ( $\Delta > 0$ ). Синхронизация наступает при увеличении периода обращения по предельному циклу до бесконечности. В момент наступления синхронизации на предельном цикле зарождаются четыре особые точки: два седла ( $\beta_1, \beta_2$ ) и два устойчивых узла ( $\alpha_1, \alpha_2$ ). Одновременно неустойчивый фокус в начале

координат превращается в неустойчивый узел. В случае  $\Delta < 0$  узлы и седла меняются местами. Изображающая точка приходит в один из устойчивых узлов.

Для  $N=4$  медленные движения изображающей точки будут происходить не возле двух, а возле четырех точек (рис. 3, в). В момент наступления синхронизации на предельном цикле зарождается восемь особых точек: 4 седла ( $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ ) и 4 устойчивых узла ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ). Если обобщить эту ситуацию на произвольное  $N > 1$ , то можно сказать, что на предельном цикле в момент перехода к синхронному режиму будет зарождаться  $2N$  особых точек. Система может иметь  $N$  устойчивых состояний (узлов), различимых по фазе. Колебания в соседних устойчивых узлах отличаются друг от друга по фазе на  $2\pi/N$ .

### Эксперимент

Экспериментально исследовался гармонический и полигармонический режим работы симметричного генератора на туннельных диодах

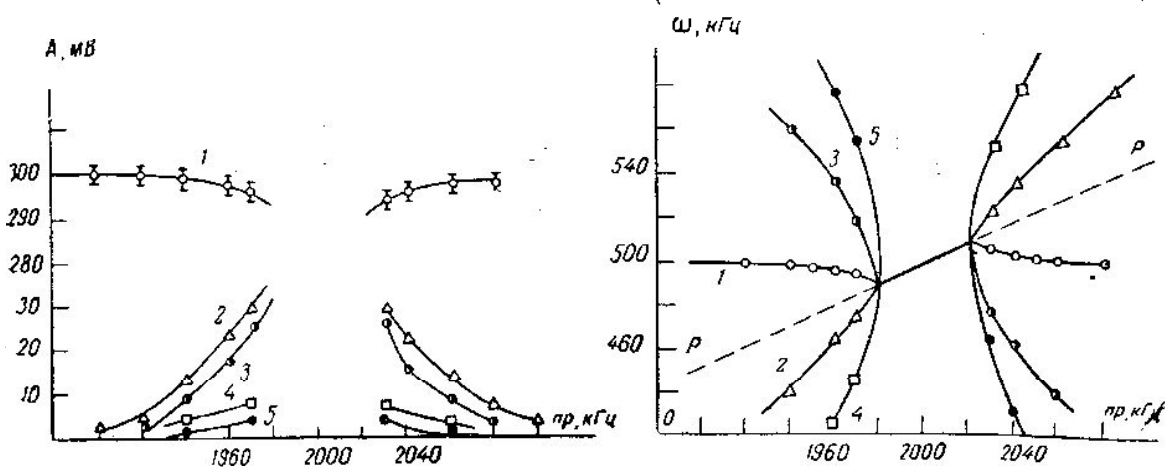


Рис. 4. Зависимости амплитуд и частот спектральных составляющих от частоты воздействия при  $n=4$ : 1 —  $\omega^*$ , 2 —  $4p-3\omega^*$ , 3 —  $5\omega^*-4p$ , 4 —  $8p-7\omega^*$ , 5 —  $9\omega^*-8p$

[15, 16] при гармоническом воздействии на активный параметр с частотой  $pr$  ( $n=2,4$ ;  $p \approx \omega_0$ ).

Большая нелинейность характеристик туннельных диодов позволяет соблюдать условия жесткости предельного цикла (5) и (6) при полосах синхронизации порядка десятков килогерц в радиочастотном диапазоне.

В спектре полигармонического режима наблюдались комбинационные частоты вида

$$\omega_k = |kp - (k \mp 1)\omega^*| = |\omega^* \pm k\Omega|.$$

При  $n=4$  в эксперименте существенными были колебания 5 частот, составляющих комбинацию гармоник автоколебаний (до 9-й включительно) и гармоник воздействия (до 2-й включительно). Измерялись амплитуды комбинационных частот, которые составляли  $\sim 1\%$  и больше от амплитуды автоколебаний. Экспериментальные зависимости амплитуд и частот спектральных составляющих от частоты воздействия представлены на рис. 4. Разрешающая способность спектрализатора (10 кГц) не позволила проследить изменение спектра в непосредствен-

ной близи от границы полосы синхронизации, ширина которой до 40 кГц. Как видно из экспериментальных графиков рис. 4, в спектре полигармонического режима отсутствует колебание частоты  $p$ . В синхронном режиме вблизи от  $\omega_0$  существуют только колебания частоты  $p$ .

Амплитуды спектральных составляющих не гасятся до нуля на границе синхронного режима. Наоборот, для ряда спектральных составляющих при  $\Delta \rightarrow \Delta_0$  происходит существенное нарастание. Частота автогенератора  $\omega^*$  увлекается до значения, равного  $p$ , на границе синхронного режима, частоты всех спектральных составляющих также стремятся к  $p$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко А. С., Мигулин В. В. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 3, 314, 1971.
2. Коваленко А. С. Диссерт. канд. МГУ, 1972.
3. Детинко В. Н., Мерзлякова М. Н. «Изв. вузов», радиофизика, 16, 393, 1973.
4. Королев В. И. «Изв. вузов», радиофизика, 14, 1527, 1972.
5. Королев В. И. Диссерт. канд. ГГУ, 1973.
6. Минакова И. И., Махаринский. «Изв. вузов», радиофизика, 16, 6, 1973.
7. Бухари А. Х. Ш., Минакова И. И., Федосеев А. Г. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 13, 684, 1972.
8. Минакова И. И., Федосеев А. Г. «Радиотехника и электроника», 11, 1973.
9. Кобзарев Ю. Б. Вестник НИИ МРТП, вып. 5 (50), 3, 1954.
10. Хохлов Р. В. ДАН СССР, 97, 411, 1954.
11. Хохлов Р. В. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., мат. и ест. науки, № 8, 51, 1954.
12. Рязин П. А. ЖТФ, 5, 1809, 1935.
13. Kazuhiko Daikoku, Yoshihiko Mizushima. Int. J. of Electr., 31, 279, 1971.
14. Stover H. L. PEEE, 54, 310, 1966.
15. Минакова И. И., Федосеев А. Г. «Радиотехника и электроника», 18, 311, 1973.
16. Минакова И. И., Федосеев А. Г. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 16, 1975.

Поступила в редакцию  
13.10 1973 г.

Кафедра  
физики колебаний