Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1975

А. Ф. РУМЫНИНА

О ВОЗМОЖНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ НЕОДНОРОДНОЙ ВНУТРИЗОННОЙ ГЕНЕРАЦИИ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА

Изучены особенности бесполевого нагрева носителей заряда при внутризонном поглощении света в двумерном случае. Получена явно стационарная неравновесная функция распределения, имеющая периодический характер по одному направлению. Доказана флуктуационная устойчивость такой системы.

Известно, что для нагрева носителей заряда не обязательно прикладывать к образцу внешнее электрическое поле. Достаточно создать искусственно поддерживаемый пространственный градиент функции распределения [1].

В настоящей работе исследуются некоторые особенности пространственно-неоднородной неравновесной системы с внутризонным поглощением, а также решается задача о флуктуационной устойчивости полученного решения. Принципиально важно, что эффект, о котором будет рассказано в работе, связан с двумерностью системы.

Основные уравнения. Стационарная задача

Обычная система уравнений для симметричной и антисимметричной частей функции распределения, f_s и f_a, имеет вид [2 и 3]

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla f_a) + e(\mathbf{E}, \nabla_p f_a) = I_s[f_a], \tag{1}$$

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla f_s) + e(\mathbf{E}, \nabla_p f_s) = -\frac{f_a}{\tau}. \tag{2}$$

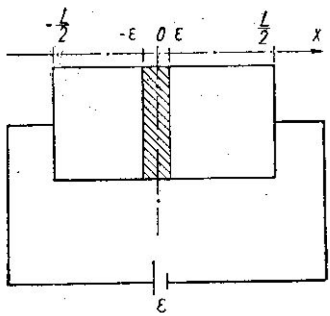
Здесь $\mathbf{E}$ — напряженность действующего электрического поля, $I[f]$ — интеграл столкновений, $\mathbf{V}$ — скорость носителей с импульсом $\mathbf{p}$.

Рассматривается случай, когда межэлектронные столкновения несущественны и, кроме того, $V_д \ll V_T$, где $V_д$ — скорость дрейфа, определяемая через поток частиц j и концентрацию ($j = nV_д$); $V_T = \left(\frac{T}{m}\right)^{1/2}$ — средняя скорость хаотического движения. Допустим также, что столкновения носителей заряда с рассеивателями носят квазиупругий характер. В этом случае $f_a \ll f_s$ и, как известно, интеграл столкновений для антисимметричной части можно взять в виде $-f_a/\tau$ [2], где τ — время свободного пробега по импульсу.

Как и в [1, 3], будем считать напряженность поля достаточно малой, пренебрегая ее влиянием на вид функции распределения f_s. Это оправдано, если выполняется неравенство (1):

$$\frac{eEl_э}{W_0} \ll 1, \tag{3}$$

где W_0 — характерная энергия носителей заряда, $l_э$ — длина свободного пробега по энергии. Существенно, что под E здесь следует понимать напряженность полного действующего поля, возникающего как за счет внешних источников, так и в результате перераспределения самих носителей заряда в пространстве. В интересующем нас случае монополярного образца условие (3) может выполняться лишь, если радиус экранирования L_D достаточно велик: $L_D \gg l_э$. С другой стороны, длина l должна значительно превышать длину свободного пробега по импульсу l_p.



Конкретно мы ограничимся, как и в [1—3], рассеянием на акустических фононах (при этом чисто упругий механизм [illegible] быть произвольным).

При этих предположениях уравнение для f_s имеет вид [1]

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \widetilde{F}(W, x, y)\, e^{-t/\tau} - \int_0^t dt' e^{-t-t'/\tau} \frac{2W}{3m} \nabla^2 f_s(W, x, y, t') = I[f_s]. \tag{4}$$

Здесь $\widetilde{F}(W, x, y)$ определяется начальным значением f_a. Уравнение для стационарной задачи получается из (4), если считать, что f_s не зависит от времени, и устремить t к бесконечности:

$$-\frac{2W\tau}{3m} \nabla^2 f_s = I[f_s]. \tag{5}$$

Граничные условия, накладываемые на f_s как функцию координат, определяются постановкой опыта.

Будем считать, что неравновесные носители генерируются в узкой полоске образца (см. рис.), шириной 2ε и длиной d, равной толщине пластины. Ширина 2ε предполагается малой по сравнению с длиной образца L и с $l_э$. Это означает, что мы вправе формально совершить предельный переход $\varepsilon \to 0$, решая уравнение (5) отдельно при $x > 0$ и $x < 0$ и накладывая условия непрерывности

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\partial f_s}{\partial x}\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = Y(W);\quad f_s(W, \varepsilon, y) = f_s(W, -\varepsilon, y). \tag{6}$$

Здесь функция $Y(W)$ связана с вероятностью оптического поглощения света свободными носителями заряда $Y(W) \geqslant 0$. Процессами рекомбинации в этой области можно вообще пренебречь.

[1] Как и в [2], мы пренебрегаем процессами рекомбинации и захвата носителей.

Пусть далее $L \gg l_э$. Тогда граничные условия на контактах $\left(\text{при } x = \pm \frac{L}{2}\right)$ можно заменить более простым соотношением

$$\lim_{x \to \pm \frac{L}{2}} f(W, x, y) = f_{s,0}, \tag{6а}$$

где $f_{s,0}$ — равновесная функция распределения.

На поверхности $y=0$ и $y=d$ граничные условия возьмем в виде

$$-\frac{2W\tau}{3m} \frac{\partial fs}{\partial y}\bigg|_{y=0} = S_1(W) f_s(W, x, 0), \tag{6б}$$

$$-\frac{2W\tau}{3m} \frac{\partial f_s}{\partial y}\bigg|_{y=d} = S_2(W) f_s(W, x, d). \tag{6в}$$

Для установления связи между функциями $Y(W)$ и f_s заметим, что первое из равенств (6) получается предельным переходом $\varepsilon \to 0$ из уравнения типа (5). Действительно, в области $(-\varepsilon, \varepsilon)$, где происходит поглощение света, вместо (5) следовало бы написать

$$-\frac{2W\tau}{3m} \frac{\partial^2 f_s}{\partial x^2} = I[f_s] + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'}{(2\pi\hbar)^3} \{P_{\text{опт}}(\mathbf{p}' \to \mathbf{p}) f_s(W_{p'}, x, y) -$$

$$- P_{\text{опт}}(\mathbf{p} \to \mathbf{p}') f_s(W_p, x, y)\}. \tag{7}$$

Функции $P_{\text{опт}}(\mathbf{p} \to \mathbf{p}')$ и $P_{\text{опт}}(\mathbf{p}' \to \mathbf{p})$ характеризуют вероятности соответствующих оптических переходов. Пренебрегая взаимодействием носителей заряда с равновесным тепловым излучением, мы можем считать, что эти величины пропорциональны силе света.

Интегрируя (7) по малой области около $x = 0$ и замечая, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} I[f_s]\, dx = 0,$$

получим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\partial f_s}{\partial x}\bigg|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3m}{2W\tau(2\pi\hbar)^3} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{p}' \{P_{\text{опт}}(\mathbf{p}' \to \mathbf{p}) \times$$

$$\times f_s(W_{p'}, x, y) - P_{\text{опт}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') f_s(W_p, x, y)\}. \tag{8}$$

В принятых предположениях сила света пропорциональна $\delta(x)$. Поэтому интеграл по x в правой части (8) оказывается конечным при $\varepsilon \to 0$ и мы имеем

$$Y(W) = I_0\{[S(W, W + \hbar\omega) + S(W, W - \hbar\omega)] f_s(W, 0, y) -$$

$$-[S(W, W + \hbar\omega) f_s(W + \hbar\omega, 0, y) + S(W, W - \hbar\omega) f_s(W - \hbar\omega, 0, y)]\}. \tag{9}$$

Здесь I_0 — сила света, а функция $S(W, W')$ пропорциональна сечению захвата фотона $\sigma(W, W')$, обратно пропорциональна $\tau(W)$ и квадрату тепловой скорости $V_T^2(W)$.

Решение уравнения (5) с граничными условиями (6а—6в) будем искать в виде

$$f_s(W, x, y) = \sum_{\lambda} C_\lambda \varphi_\lambda(x, y) f_\lambda(W) + f_{s,0}. \tag{10}$$

Функции $f_\lambda(W)$ — собственные функции оператора столкновений $I[f_s]$ и λ — его собственные значения [2]. В случае рассеяния на акустических фононах $f_\lambda(W)=e^{-W/T_0}L_n^1\left(\frac{W}{T_0}\right)$ и $\lambda=2n$, где $n=1, 2, \ldots$ — целые положительные числа, T_0 — температура решетки, $L_n^1(x)$ — полиномы Лагерра.

Функции $f_\lambda(W)$ ортонормированы условием

$$\int_0^\infty f_\lambda(W)\,f_{\lambda'}(W)\,We^W\,dW=\delta_{\lambda\lambda'}\,\Gamma(\lambda+1). \tag{11}$$

Подставив (10) в (6), для $\varphi_\lambda(x, y)$ получим волновое уравнение

$$\nabla^2\varphi_\lambda(x, y)+\lambda\varphi_\lambda(x, y)=0. \tag{12}$$

Пусть $\varphi_\lambda(x, y)=X_\nu(x)\,Y_\varkappa(y)$, причем $\nu+\varkappa=\lambda$, тогда общее решение (10) в силу (6) имеет вид

$$\begin{gathered} f_s(W, x, y)=\sum_\lambda C_\lambda e^{-x\sqrt{\nu}}\cos\left(\sqrt{x}y+\chi_{\varkappa,\lambda}\right)f_\lambda(W)+f_{s,0}, \quad x>0, \\ f_s(W, x, y)=\sum_\lambda C_\lambda e^{x\sqrt{\nu}}\cos\left(\sqrt{\varkappa}y+\chi_{\varkappa,\lambda}\right)f_\lambda(W)+f_{s,0}, \quad x<0. \end{gathered} \tag{13}$$

Для определения коэффициентов $\chi_{\varkappa,\lambda}$ воспользуемся уравнением (6б) и условием (11), тогда получим

$$\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{tg}\,\chi_{\varkappa,\lambda}=\frac{\sum\limits_\lambda\int\limits_0^\infty dW\,We^{+W}S_1(W)\,f_\lambda(W)\,f_{\lambda'}(W)}{\Gamma(\lambda+1)\,\dfrac{2\tau}{3m}}. \tag{14}$$

Из (6б и в) и (14) получим

$$\mathrm{tg}\sqrt{\varkappa}\,d=\frac{\left\{\sum\limits_\lambda\int\limits_0^\infty dW\,[S_2(W)-S_1(W)]\,We^W f_\lambda f_{\lambda'}\right\}\sqrt{\varkappa}\,\dfrac{2\tau}{3m}\,\Gamma(\lambda+1)}{\varkappa\dfrac{4\tau^2}{gm^2}\,\Gamma^2(\lambda+1)+\sum\limits_\lambda\int\limits_0^\infty S_1(W)\,We^W f_\lambda f_{\lambda'}dW\sum\limits_\lambda\int\limits_0^\infty S_2(W)\,We^W f_\lambda f_{\lambda'}dW}. \tag{15}$$

Уравнение (15) трансцендентно относительно переменной $\varkappa$. Видно, что значения $\varkappa$ образуют дискретный набор чисел. Причем в случае, когда $S_1(W)=S_2(W)$, $\mathrm{tg}\sqrt{\varkappa}\,d=0$ и $\varkappa=\left(\frac{\pi k}{d}\right)^2$ $(k=1, 2\ldots)$. Далее для наглядности будем пользоваться именно этими значениями.

Чтобы найти коэффициенты C_λ в (13), воспользуемся условиями (6а) и (11) и после интегрирования от 0 до d по y получим соотношение

$$\sum_\lambda\sum_\varkappa^\lambda C_{\lambda'}\left\{2\,\frac{\sqrt{\lambda'-\varkappa}}{\sqrt{\varkappa}}\,\delta_{\lambda\lambda'}+\frac{1}{\varkappa}\,\Gamma_{\lambda\lambda'}\right\}=A_{\lambda\lambda'}, \tag{16}$$

где

$$\Gamma_{\lambda\lambda'} = \int_0^\infty Y(W) f_\lambda(W)\, dW, \tag{17}$$

$$A_{\lambda'} = (A_0 + 1)\int_0^\infty dW' dW S(W_1 W') f_{\lambda'}(W)\, [f_{s,0}(W) - f_{s,0}(W')]. \tag{18}$$

Система (16) имеет единственное и нетривиальное решение, так как детерминант ее не содержит произвольных параметров и, следовательно, вообще говоря, не равен нулю. Оценим величины $C_{\lambda'}$:

$$C_{\lambda'} = \frac{A_{\lambda'}}{\det\left|\sum_{\varkappa}^{\lambda'}\left(2\,\frac{\sqrt{\lambda\varkappa}}{\sqrt{\varkappa}}\,\delta_{\lambda\lambda'} + \Gamma_{\lambda\lambda'}\right)\sin\chi_{\varkappa,\lambda}\right|}. \tag{19}$$

В нашем случае рассеяния на акустических фонах $\Gamma_{\lambda\lambda'} \underset{\lambda'\neq\lambda}{\ll} \Gamma_{\lambda\lambda}$, тогда det есть произведение диагональных элементов, а именно

$$\prod_{\lambda'}\left\{\sqrt{\lambda'}\,\frac{d}{\pi}\sum_k^{\lambda'\left(\frac{d}{\pi}\right)^2} - \frac{1}{\pi}\sum_k^{\lambda'\left(\frac{d}{\pi}\right)^2}\frac{1}{k} + \frac{d}{\pi}\sum_k^{\lambda'\left(\frac{d}{\pi}\right)^2}\frac{1}{k^2}\,\Gamma_{\lambda\lambda}\right\}, \tag{20}$$

откуда

$$C_{\lambda'} \sim \frac{\lambda' + 1}{\ln 2\left(\frac{d}{\pi}\right)^2 \ln 4\left(\frac{d}{\pi}\right)^2 \ln\lambda\left(\frac{d}{\pi}\right)^2 (\lambda+2)!}. \tag{21}$$

Таким образом, общее решение

$$f_s(W, x, y) = \sum_\lambda \sum_{k=0}^{\sqrt{\lambda}\frac{d}{\pi}} C_\lambda e^{-x\sqrt{\lambda - \left(\frac{\pi k}{d}\right)^2}} \cos\left(\frac{\pi k}{dy} + \chi_{k,\lambda}\right) f_\lambda(W) + f_{s,0}. \tag{22}$$

Из (21) видно, что $C_{\lambda'}$ быстро затухают с ростом λ'. Оценка показывает, что вклад в сумму (22) существен только от нескольких первых слагаемых (в зависимости от величины d). Сумма оставшихся членов пренебрежимо мала по сравнению с длиной первых членов.

Следовательно, в двумерной геометрии при внутризонной генерации неосновных носителей возможна периодическая зависимость функции распределения и плотности носителей заряда от координаты y, т. е. плоскости $y=0$ и $y=d$ служат как бы резонатором для образования стоячих волн плотности неравновесных носителей заряда.

Устойчивость стационарного решения

Задача об устойчивости неравновесного стационарного состояния рассматривалась в работах [2, 3]. Докажем, что при внутризонной генерации неравновесных носителей стационарное решение устойчиво. Положим

$$f_s = f_s^0(W, x, y) + \delta f_s(W, x, y, t), \tag{23}$$

где $\delta f_s(W, x, y, t)$ — флуктуация функции распределения. При $t=0$ $\delta f_s = F_s(W, x, y)$.

Подвергая уравнение (4) одностороннему преобразованию Лапласа, для лапласовского образа $\delta f_s(W, x, y, p)$ получим, как и в [2, 3], следующее уравнение:

$$p\,\delta f_s - \widehat{L}[f_s] = F_s - \frac{\tau F_a}{1+p\tau}. \tag{24}$$

Здесь F_a есть начальное значение антисимметричной части функции распределения, а оператор $\widehat{L}$ определяется условием

$$\widehat{L}[f] = \frac{2W\tau}{3m}\,\frac{1}{1+p\tau}\,\nabla^2 f + I[f]. \tag{25}$$

Мы не рассматривали здесь специальный случай $1+p\tau=0$. Очевидно, он отвечает обычной особенности, которая дает затухание со временем $\tau(W)$. Обозначим собственные функции и собственные значения оператора $\widehat{L}$ через Ψ_μ и μ:

$$\widehat{L}[\psi_\mu] = \mu\,\psi_\mu. \tag{26}$$

Граничные условия, накладываемые на функции Ψ_μ, те же, что и для $f_s(W, x, y)$. Полюсы функции δf_s определяются условием

$$p = \mu(p). \tag{27}$$

Очевидно, полученное выше стационарное распределение устойчиво при $\operatorname{Re} p<0$ и неустойчиво при $\operatorname{Re} p>0$.

В силу (25) и (26) мы имеем:

$$\frac{1}{1+p\tau}\,\nabla^2\psi_\mu + \frac{3m}{2W\tau}\,I[\psi_\mu] = \frac{3m}{2W\tau}\,\mu\psi_\mu. \tag{28}$$

Введем обозначение

$$\int\limits_{-L}^{L} dx \int\limits_{0}^{d} dy \int\limits_{0}^{\infty} dW\,\frac{3m}{2W\tau}\,|\psi_\mu|^2 = N. \tag{29}$$

Рассмотрим выражение

$$A \equiv \int\limits_{0}^{d} dy \int\limits_{-L}^{L} dx\,\psi_\mu \left(\frac{\partial^2\psi_\mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_\mu}{\partial y^2}\right) =$$

$$= -\int\limits_{0}^{d} dy \int\limits_{-L}^{L} dx \left\{\left|\frac{\partial\psi_\mu}{\partial x^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial\psi_\mu}{\partial y}\right|^2\right\} + \int\limits_{0}^{d} dy\,\psi_\mu \frac{\partial\psi_\mu}{\partial x}\Bigg|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} +$$

$$+ \int\limits_{0}^{d} dy\,\psi_\mu \frac{\partial\psi_\mu}{\partial x}\Bigg|_{-L}^{L} + \int\limits_{-L}^{L} dx\,\psi_\mu \frac{\partial\psi_\mu}{\partial y}\Bigg|_{0}^{d}. \tag{30}$$

С учетом (6) находим

$$A = -\int\limits_{-L}^{L} dx \int\limits_{0}^{d} dy \left\{\left|\frac{\partial\psi_\mu}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial\psi_\mu}{\partial y}\right|^2\right\} + Y(W)\,\psi_\mu(W, 0, y). \tag{31}$$

Комбинируя равенства (28), (29), (31), получим

$$\mu N = \int_0^d dy \int_{-L}^{L} dx \int_0^\infty dW \frac{-1}{1+p\tau} \left\{ \left| \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi_\mu}{\partial y} \right|^2 \right\} +$$

$$+ \int_0^d dy \int_{-L}^{L} dx \int_0^\infty dW \, \frac{3m}{2W\tau} \psi_\mu I[\psi_\mu] + \int_0^d dy \int_{-0}^{\infty} \frac{dW}{1+p\tau} Y(W) \psi_\mu (W, 0, y). \tag{32}$$

Ограничимся случаем $p \in \mathrm{Re}$. Тогда и $\mu \in \mathrm{Re}$, и функции также можно выбрать вещественными. При этом второе слагаемое в (32) отрицательно заведомо в силу отрицательной определенности оператора столкновений I в рассматриваемом пространстве функций. При $1+p\tau>0$ отрицательным оказывается и первое слагаемое[1]. Наконец, отрицательно и третье слагаемое в правой части (30). Действительно, согласно (8) и (9) оно представляет собой просто специальную форму «интеграла столкновений», описывающего «рассеяние электронов на фотонах».

Таким образом, $\mu<0$: стационарное состояние рассматриваемой системы устойчиво относительно флуктуаций функции распределения и, следовательно, в такой системе возможно образование периодического распределения плотности носителей заряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бонч-Бруевич В. Л. «Физика и техника полупроводников», 3, 1010, 1969.
2. Bonch-Bruevich W. L. «Phys. Stat. Soc.», **53**, 911, 1969; «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 5, 98, 1969.
3. Бонч-Бруевич В. Л., Пройкова Я. П. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 6, 631, 1970.

Поступила в редакцию
28.9 1973 г.

Кафедра
физики полупроводников

[1] Случай $1+p\tau<0$ в данном контексте неинтересен, так как он возможен лишь при $p<0$.