Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1975

УДК 533.9.01

А. А. ВЛАСОВ, М. А. ЯКОВЛЕВ

О ТЕОРИИ СТРАТ

Получено выражение парной энергии взаимодействия между ионами, рассеянными на акустических колебаниях нейтрального газа в цилиндрической трубке. С учетом нового взаимодействия выводится дисперсионное уравнение, описывающее как бегущие, так и стоячие страты. Проведена численная оценка результатов и сделано сравнение с экспериментальными наблюдениями.

Теория страт включает: 1) выявление единого молекулярно-кинетического механизма причин появления расслоения плазмы положительного столба, которое проявляется в виде стационарных и бегущих страт; 2) определение области существования критических параметров среды, при которых возможно их появление и исчезновение; 3) объяснение существования различных типов дисперсии бегущих страт, наблюдаемых экспериментально, и 4) получение правильного порядка периодов, скоростей перемещений и их зависимостей от внешних и внутренних параметров среды. Единой теории, положительно решающей указанные задачи, не существует. В большинстве теоретических работ объясняются только отдельные стороны явления; в частности не раскрыта общность природы бегущих и стационарных страт [1—3].

Учет нового фактора — взаимодействия ионов через промежуточную систему (акустическое поле в нейтральном газе) [4] позволяет продвинуться вперед в решении указанных задач. В отличие от [4] взаимодействие между ионами существенным образом изменяется благодаря учету влияния стенок трубки на акустический спектр в нейтральном газе.

Акустический спектр в нейтральном газе при наличии стенок. Явное выражение энергии взаимодействия ионов через промежуточную систему

В работе [4] с использованием матричного элемента рассеяния ионов на фононах

$$\langle \mathbf{k}-\mathbf{q};\ \mathbf{k}+\mathbf{q}\,|V|\,\mathbf{k},\ \mathbf{k}\rangle = \frac{|M_{kk-q}|^2\, 2\hbar\,\omega_{\mathbf{q}}}{[\varepsilon(\mathbf{k})-\varepsilon(\mathbf{k}-\mathbf{q})]^2-(\hbar\,\omega_{\mathbf{q}})^2} \tag{1}$$

была получена энергия взаимодействия между ионами в случае изотропного распространения акустических волн в холодной плазме. В рассматриваемом случае мы должны учесть особенности колебаний нейтрального газа в цилиндрической трубке.

1. Акустическое поле распространяется вдоль оси трубки ($\mathbf{q}=\mathbf{q}_z$, ось z совпадает с осью трубки). Решение волнового уравнения для возмущения плотности нейтрального газа в цилиндрической трубке (при нулевых граничных условиях), соответствующее j-той гармонике, имеет вид

$$\delta\rho^{(j)}(r_\perp, z, t) = J_0\left(\frac{\mu_j}{R_m} r_\perp\right) \sum_{q_z} \delta\rho_{q_z} \exp\left[-i\omega_{q_z} t + i q_z z\right]. \tag{2}$$

Здесь μ_j — корень функции Бесселя нулевого порядка ($j=1, 2, 3,\ldots$), R_m — радиус трубки.

2. В отличие от свободного пространства акустические волны в трубке имеют дисперсию

$$\omega_{q_z}^2 = v_s^2 q_z^2 + \omega_0^2, \tag{3}$$

где $\omega_0 = v_s \dfrac{\mu_j}{R_m}$, v_s—скорость звука в нейтральном газе.

Учитывая оба эти условия, аналогично [4], получаем значение амплитуды в разложении (2) и матричного элемента ион-фононного взаимодействия $M_{\mathbf{kk-q}}$:

$$(\delta\rho_q)^2 = \frac{\left(n_q + \dfrac{1}{2}\right)\hbar\,\omega_q\,\rho_0}{\dfrac{1}{2}\, m v_\Phi^2\, \Omega\, n^2} \quad \text{(здесь и далее } q_z = q\text{)}; \tag{4}$$

$$n_q = \left(\exp\left[\frac{\hbar\,\omega_q}{\theta}\right] - 1\right)^{-1},$$

θ, Ω, ρ_0 — температура, объем и равновесная концентрация нейтрального газа,

$$n = \frac{2\pi}{S_m}\int_0^{R_m} J_0\left(\frac{\mu_j}{R_m} r_\perp\right) r_\perp\, dr_\perp,$$

S_m — площадь поперечного сечения трубки; v_Φ — фазовая скорость акустических колебаний в трубе:

$$v_\Phi = \frac{\omega_q}{q}. \tag{5}$$

Матричный элемент

$$M_{\mathbf{kk-q}} = \delta\rho_q\, n\, \sigma_{ia}(q) \exp\left[-i\,\omega_q t\right], \tag{6}$$

где

$$\sigma_{ia}(q) = \int k_{ia}(s) \exp\left[-i\,\mathbf{qs}\right] ds$$

Фурье-образ парной энергии взаимодействия между ионом и поляризованным атомом.

Подставляя (6) в (1), с учетом (3), (4) и (5), имеем

$$\langle \mathbf{k}-\mathbf{q};\ \mathbf{k}+\mathbf{q}\,|V|\,\mathbf{k},\ \mathbf{k}\rangle \equiv V_q = \frac{16 m_i^2 \rho_0 \left(n_q + \frac{1}{2}\right) \sigma_{ia}^2(q)\, q^2}{m \hbar^2 \Omega\, (q^2 - q_1^2)(q^2 + q_2^2)} \tag{7}$$

$\left(\text{при условии } |\mathbf{k}| \ll \frac{m_i v_s}{\hbar}\right)$ и

$$q_{1,2} = \left[\frac{\left[v_s^4 + \left(\frac{\hbar \omega_0}{m_i}\right)^2\right]^{1/2} \pm v_s^2}{\frac{\hbar^2}{2m_i^2}}\right]^{1/2}. \tag{8}$$

Энергия взаимодействия между рассеянными ионами определяется из формулы

$$V(\mathbf{s}) \equiv V(z) = \frac{\Omega}{2\pi S_m} \int_{-\infty}^{\infty} V_{\mathbf{q}} \exp[iqz]\, dq$$

или, используя (7),

$$V(z) = \frac{8 m_i \rho_0}{\pi m\, \hbar S_m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(q)\, \sigma_{ia}^2(q)\, q^2}{(q^2 - q_1^2)(q^2 + q_2^2)} \exp[iqz]\, dq \tag{9}$$

$\left(\text{введем обозначение } \varphi(q) = n_q + \frac{1}{2}\right)$.

Используя четность функций $\varphi(q)$ и $\sigma_{ia}^2(q)$, интеграл из (9) записываем в виде

$$I = \frac{2\sigma_0^2}{q_1^2 + q_2^2}\left[q_2^2 \int_0^{\infty} \frac{\varphi(q) \cos q|z|}{q^2 + q_2^2}\, dq + q_1^2 \int_0^{\infty} \frac{\varphi(q) \cos q|z|}{q^2 - q_1^2}\, dq,\right. \tag{10}$$

при получении (10) учитываем медленный характер изменения $\sigma_{ia}^2(q) \equiv \sigma_0^2 \cong (4\pi e^2 a_0^2)^2$ [4] (a_0 — эффективный размер атома). При нахождении интегралов в формуле (10) для первого слагаемого, учитывая монотонное убывание $\varphi(q)$, используется вторая теорема о среднем; во втором — $\varphi(q)$ выносится в полюсе подынтегральной функции. Выполняя интегрирование оставшихся выражений и подставляя результат в (9), получаем значение парной энергии взаимодействия ионов через акустическое поле нейтрального газа в цилиндрической трубке:

$$K_{ii}(|z|) \equiv V(|z|) = \frac{\tilde{\sigma}}{2\varphi(0) S_m}\left(q_2 \varphi(0) \exp[-q_2|z|] - q_1 \varphi(q_1) \sin q_1|z|\right),$$
$$\tilde{\sigma} = \frac{16 \rho_0 \varphi(0)}{m(q_1^2 + q_2^2)}\left(\frac{m_i \sigma_0}{\hbar}\right)^2. \tag{11}$$

Основной особенностью найденной парной энергии (11) является дальнедействующий характер (по сравнению с экранированным кулоновским взаимодействием). Действительно, радиус действия, согласно (11):

$$r_{\Phi} = \frac{1}{q_2} = \frac{R_m}{\mu_j} \tag{12}$$

(учитывая, что $\left(\frac{\hbar\omega_0}{m_i}\right)^2 \ll v_s^4$, а из (8) следует, что $q_2 = \frac{\mu_j}{R_m}$), т. е. $r_ф \sim R_m$ ($R_m \sim 1$ см) и уменьшается с ростом μ_j. Заметим, что второе слагаемое в (11) быстро осциллирует ($q_1 \gg q_2$, $q_2\varphi(0) \sim q_1\varphi(q_1)$) и не оказывает заметного влияния на взаимодействие. Для сравнения с (12) радиус экранированного кулоновского взаимодействия в условиях газоразрядной плазмы $10^{-3} \div 10^{-4}$ см. Отметим также, что согласно экспериментальным работам [5, 6] длина страт $\lambda \sim R_m$.

Дисперсионное уравнение для ионных волн при учете нового взаимодействия

Используя развитый аппарат решения кинетического уравнения в линейном приближении [7], запишем дисперсионное соотношение для ионных волн:

$$1 - \frac{k\rho_i^0}{m_i}\sigma_{ii}(k)\int\limits_{-\infty}^{\infty} dv\, \frac{\partial f_M[(v-v)_0^2]}{kv - ip} = 0, \tag{13}$$

$$\sigma_{ii}(k) = \int k_{ii}(s)\exp[-i\,\mathbf{ks}]\,d\,\mathbf{s}, \tag{14}$$

f_M — функция Максвелла, m_i — масса иона, v_0 — скорость дрейфа, вызванная внешним электрическим полем E, ρ_i^0 — равновесная концентрации ионов. Уравнение (13) устанавливает связь между комплексной частотой p и действительным волновым числом k.

З а м е ч а н и е. Поскольку ионные волны распространяются вдоль оси трубки, то $\mathbf{k} = \{0, 0, k_z\}$ аналогично $\mathbf{v}_0 = \{0, 0, v_{0z}\}$, так как дрейф происходит также вдоль оси. Далее будем обозначать $k_z = k$, $v_{0z} = v_0$ и $v_z = v$.

В случае слабого затухания или нарастания из уравнения (13) получаем

$$\frac{\theta_i}{2\rho_i^{(0)}\sigma_{ii}(k)} = -\int\limits_0^{\infty} \xi e^{-\zeta^2}\cos\eta\xi\, d\xi,$$

$$\gamma = k\frac{\pi\rho_i^{(0)}}{m_i}\left[\frac{d}{dk}\sigma_{ii}^{-1}(k)\right]\frac{dv_ф}{dk}\partial f_M(|v_ф - v_0|). \tag{15}$$

Здесь

$$v_ф = \frac{\omega(k)}{k}, \quad \eta = \frac{2}{v_m}(v_ф - v_0), \quad v_m^2 = \frac{2\theta_i}{m_i},$$

θ_i — температура ионного газа (в эргах), ω — частота, γ — коэффициент затухания; таким образом, возмущение концентрации ионов $\delta\rho_i$:

$$\delta\rho_i(z, t) \sim \exp[ikz - i\omega(k)t - \gamma(k)t].$$

Для получения дисперсионных кривых нам требуется Фурье-образ парной энергии взаимодействия ионов (11).

Исходя из (14), находим

$$\sigma_{ii}(k) = \tilde{\sigma}\left[\frac{q_2^2}{k^2 + q_2^2} + \frac{\varphi(q_1)}{\varphi(0)}\,\frac{q_1^2}{k^2 - q_1^2}\right] \tag{16}$$

в наиболее интересной для эксперимента области $k \sim R_m^{-1} \ll q$, учитывая, что $\varphi(q_1) \ll \varphi(0)$, выражение (16) принимает вид

$$\sigma_{ii}(k) = \tilde{\sigma}\,\frac{q_2^2}{k^2 + q_2^2}. \tag{17}$$

З а м е ч а н и е. При учете добавочного экранированного кулоновского взаимодействия в (17) дополнительное слагаемое $\sigma_Д = \frac{4\pi e^2}{k^2 + \varkappa_Д^2}$ ($\varkappa_Д^{-1}$ — радиус Дебая) фактически не меняет значения (17), так как при $k \sim R_m^{-1}$ и $\sigma_{ii} \cong 3 \cdot 10^{-25}$ эрг·см^3 $\sigma_д \cong 2 \cdot 10^{-26}$ эрг·см^3 (для значений параметров (25)), т. е. $\sigma_{ii} \gg \sigma_д$.

Подставляя (17) в (15), получаем неявное дисперсионное уравнение для волн расслоения слабоионизованной плазмы:

$$\frac{k^2 + q_2^2}{\varkappa^2} = -\int_0^\infty \xi e^{-\xi^2} \cos \eta\xi \, d\xi \equiv I(\eta). \tag{18}$$

Здесь

$$\varkappa^2 = \frac{2 q_2^2 \rho_i^{(0)}}{\theta_i}\,\tilde{\sigma}. \tag{19}$$

Условие существования ионных волн и типы их дисперсий. Стационарные страты

Для нахождения явной зависимости $\omega = \omega(k)$ требуется решить трансцендентное уравнение (18). Специальная функция $I(\eta)$ протабулирована в [7], $-0{,}5 \leqslant I(\eta) \leqslant 0{,}14$:

$$I(\eta) = \frac{1}{4} h^2 - \frac{1}{2}, \ |\eta| \ll 1, \ I(\eta) = \eta^{-2}, \ |\eta| \gg 1.$$

Из характера поведения левой и правой части (18) следует, что дисперсионное уравнение обладает тремя характерными особенностями.

Условие сопряжения левой и правой части (18) требует, чтобы

$$\frac{q_2^2}{\varkappa^2} < I(\eta)_{\max}, \tag{20}$$

т. е. для существования дисперсии требуется достаточная концентрация нейтрального и заряженного компонента и не слишком высокая температура ионного газа.

Равенство (18) может выполняться только в интервале

$$0 < k \leqslant k_{\max}, \qquad k_{\max}^2 = I(h)_{\max}\varkappa^2 - q_2^2. \tag{21}$$

Зависимость между ω и k носит многозначный характер, одновременно для фиксированного μ_j могут существовать четыре типа дисперсии (два соответствуют слабозатухающим решениям $\gamma > 0$, два — слабонарастающим $\gamma < 0$).

Таким образом, теория указывает на существование различных возможных дисперсий, которые могут осуществиться с той или иной степенью вероятности (причина, ограничивающая эти возможности, здесь не рассматривается). Заметим, что экспериментальные факты подтверждают многообразие видов дисперсионных кривых, так согласно [3], уже найдено 16 типов дисперсий, причем первые 8 являются зеркальным отображением «вторых» по отношению к оси k. Кроме того, из (18) следует, что любая выделенная из четырех дисперсионных кривых может «расщепляться» на несколько «подобных», вследствие дискретного изменения $\mu_j(\varphi(0)\sim 1/\mu_j)$. С ростом μ_j условие (20) нарушается, т. е. может существовать лишь конечное число «подобных» кривых. Вследствие сложного вида дисперсионного уравнения (18) аналитическое выражение решений можно получить лишь в области $k \ll k_{\max}$:

$$\omega_{\mathrm{I,II}} - v_0 k = \pm \frac{v_{\mathrm{m}} k}{2} \left[\frac{\varkappa^2}{k^2 + q_2^2} \right]^{1/2}, \tag{22}$$

$$\omega_{\mathrm{III,IV}} - v_0 k = \pm v_{\mathrm{m}} k \left[\frac{k^2 + q_2^2}{\varkappa^2} + \frac{1}{2} \right]^{1/2}. \tag{23}$$

Из (22) и (23) следует, что I и III ветви дисперсионной кривой являются зеркальным отображением II и IV относительно оси k, кроме того, волны с дисперсией (22) слабо затухают, а с дисперсией (23) слабо нарастают.

З а м е ч а н и е. Пока знак у скорости дрейфа v_0 не фиксирован, имеется полная симметрия в выражениях (22) и (23), но поскольку за счет внешнего поля положительные ионы двигаются от анода к катоду, то имеется выделенное направление вдоль оси трубки. Будем для определенности считать $v_0 > 0$ (т. е. положительное направление анод — катод).

С учетом замечания из характера дисперсионных кривых (22) и (23) следует, что ветви II и IV при определенных v_0 могут пересекать ось k ($\omega(k_0) = 0$, $k_0 \neq 0$), т. е. стационарные страты. Численную оценку периода неподвижных страт сделаем в следующем пункте.

Количественная оценка

Проведем количественное рассмотрение на примере IV ветви (23):

$$\omega_{\mathrm{IV}} = v_0 k - v_m k \left[\frac{k^2 + q_2^2}{\varkappa^2} + \frac{1}{2} \right]^{1/2}. \tag{24}$$

Для типичных значений параметров газового разряда

$$\theta_i \cong \theta = 4{,}3 \cdot 10^{-14} \text{ эрг}, \quad m = m_i = 3{,}4 \cdot 10^{-23} \text{ г},$$

$$R_m = 1{,}5 \text{ см}, \quad v_s \cong 3 \cdot 10^4 \text{ см/с}, \quad \rho_0 = 5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3},$$

$$\rho_i^{(0)} = 10^{12} \text{ см}^{-3} \tag{25}$$

получаем значение $\varkappa^2$ из (19):

$$\varkappa^2 \cong 30 \frac{q_2^2}{\mu_j}.$$

Согласно (24) фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = v_0 - v_m \left(\frac{k^2 + q_2^2}{\varkappa^2} + \frac{1}{2} \right)^{1/2}, \tag{26}$$

так как для обычных полей в трубках $E \cong 1 \div 10$ В/см скорость дрейфа ионов $v_0 \cong 10^4 \div 10^5$ см/с, а тепловая скорость $v_m = \left(\frac{2\theta_i}{m_i}\right)^{1/2} \cong 5 \cdot 10^4$ м/с, то из (26) следует: $v_ф \sim 10^4 \div 10^5$ м/с, что соответствует наблюдаемым значениям скорости перемещения страт [2, 3].

Для параметров (25), k_{max} из условия (21) имеет значение

$$k_{max} \cong \frac{2}{R_m},$$

т. е. для данных параметров могут распространяться волны с длиной волны $\lambda \geqslant \frac{2\pi}{k_{max}} \cong 3{,}1\ R_m$.

Период стоячих страт определяется из формулы (24):

$$k_0^2 = \varkappa^2 \left[\left(\frac{{}^r v_0}{v_m} \right)^2 - \frac{1}{2} \right] - q_2^2. \quad (27)$$

Для параметров (25), используя (27) и учитывая неравенство (21), находим период стационарных слоев:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} \cong 5{,}2\ R_m$$

при условии, что скорость дрейфа

$$0{,}5 \leqslant \left(\frac{v_0}{v_m} \right) \leqslant 0{,}64.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Oleson N., Cooper L. Adv. on Electronics and El. Ph. 24, 155, 1968.
2. Недоспасов А. В. «Успехи физических наук», **94**, 439, 1968.
3. Пекарек Л. «Успехи физических наук», **94**, 463, 1968.
4. Власов А. А., Яковлев М. А. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., **16**, № 3, 1975.
5. Зайцев А. А. ДАН СССР, **84**, 41, 1952.
6. Gundermann S. «Beitr. Plasmaphys.», **9**, 325, 1969.
7. Власов А. А. Теория многих частиц. М., 1950.

Поступила в редакцию
10.10 1973 г.

Кафедра
теоретической физики