

В. Ч. ЖУКОВСКИЙ, О. Е. ШИШАНИН

## СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В ЦИКЛИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЯХ С УЧЕТОМ АЗИМУТАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Исследуется влияние искажений аксиально-симметричного магнитного поля на свойства синхротронного излучения электрона.

Показано, что спектрально-угловое распределение компонентов линейной поляризации излучения смещается относительно средней медианной плоскости на величину, пропорциональную амплитуде вынужденных колебаний.

В последнее время синхротронное излучение электронов в циклических ускорителях успешно применяется как интенсивный источник света в спектроскопических исследованиях твердых тел (см., например, [1]). Поэтому представляет интерес дальнейший анализ свойств этого излучения с учетом влияния на него особенностей реальных ускорителей и, в частности, различных неоднородностей фокусирующего магнитного поля. Синхротронное излучение электрона как в однородном, так и в неоднородном аксиально-симметричном магнитном поле было исследовано ранее [2—5]. В настоящей работе рассмотрены спектральные и угловые характеристики излучения электрона с учетом отклонений фокусирующего поля от аксиальной симметрии.

Наличие азимутальных неоднородностей магнитного поля должно приводить к появлению дополнительной периодической силы Лоренца, под действием которой частица совершает вынужденные колебания около невозмущенной круговой орбиты. Полученная таким образом равновесная орбита является сложной кривой, вблизи которой частица совершает также свободные бетатронные колебания [6—8]. Решим вначале упрощенную задачу о движении электрона в круговом ускорителе, который разбит на четыре сектора, смещенных по вертикали относительно средней магнитной плоскости. Здесь не учитывается влияние прямолинейных промежутков и того, что в действительности медианная поверхность не является плоскостью даже в пределах одного сектора (см., например, [9]). Заметим, что медианной поверхностью называется геометрическое место точек, где радиальная составляющая магнитного поля  $H_r = 0$ .

В случае магнитного поля аксиально-симметричного относительно оси  $z$  составляющая  $H_r$  в первом приближении пропорциональна координате  $z$ , т. е.  $H_r = -qbz/r^{q+1}$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $q$  — показатель спадания

поля,  $b$  — константа. Для магнитного поля с искажениями вследствие сдвига секторов составляющая  $H_r$  будет являться периодической функцией. Раскладывая ее в ряд Фурье, в общем случае получим

$$H_r = -q \frac{bz}{r^{q+1}} - \frac{H_{r0}}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} H_{rk} \cdot \cos(k\varphi - \varphi_k), \quad (1)$$

где  $H_{r0}$  и  $H_{rk}$  — коэффициенты разложения  $H_r$ , а азимутальный угол  $\varphi = \text{arctg } y/x$ . Для произвольной магнитной медианной поверхности коэффициента Фурье определяются с помощью методов практического гармонического анализа.

Учитывая, что  $H_z = \frac{b}{r^q} \left(1 - \frac{q^2}{2} \frac{z^2}{r^2}\right)$ , найдем решения уравнений движения частицы в приближении малых колебаний:

$$\rho = A \sin(\sqrt{1-q} \omega_0 t + \chi), \quad (2)$$

$$z = B \sin(\sqrt{q} \omega_0 t + \psi) + \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} z_k \cos(k\varphi - \varphi_k),$$

где основная частота  $\omega_0 = ce_0 H_0 / E$ ,  $H_0 = b/R$ ,  $\rho = r - R$ ,  $R$  — радиус невозмущенной круговой орбиты,  $A$  и  $B$  — амплитуды радиальных и вертикальных свободных колебаний,  $\chi$  и  $\psi$  — их начальные фазы,  $a_0 = -\frac{R}{q} \frac{H_{r0}}{H_0}$ , амплитуды вынужденных колебаний  $z_k = \frac{R}{k^2 - q} \cdot \frac{H_{rk}}{H_0}$ .

Ограничиваясь в (1) и (2) первой гармоникой, найдем угловую скорость электрона

$$\dot{\varphi} = \omega_0 \left(1 - \frac{\rho}{R} + \frac{3-q}{2} \frac{\rho^2}{R^2} + \frac{q}{2} \frac{B^2}{R^2} + \frac{q}{8} \frac{a_0^2}{R^2} + \frac{q}{2} \frac{z_1^2}{R^2} - \frac{1}{2} \frac{z^2}{c^2}\right).$$

При этом полная скорость, как и должно быть в магнитном поле, является константой

$$v = R\omega_0 \sqrt{1 + (1-q) \frac{A^2}{R^2} + q \left(\frac{B^2}{R^2} + \frac{1}{4} \frac{a_0^2}{R^2} + \frac{z_1^2}{R^2}\right)}.$$

Волновой вектор излучения запишем в виде

$$\mathbf{x} = \left\{ \frac{\omega}{c} \sin \theta \cos \eta, \frac{\omega}{c} \sin \theta \sin \eta, \frac{\omega}{c} \cos \theta \right\},$$

где  $\eta$  и  $\theta$  — сферические углы, а компоненты линейной поляризации интенсивности излучения будем описывать единичными векторами

$$\mathbf{n}_\sigma = \{\sin \eta, -\cos \eta, 0\} \text{ и } \mathbf{n}_\pi = \{\cos \theta \cos \eta, \cos \theta \sin \eta, -\sin \theta\}.$$

Следуя методу, описанному в работе [4], получим в классическом приближении следующие формулы для  $\sigma$ - и  $\pi$ -компонентов интенсивности излучения с учетом вынужденных и свободных вертикальных колебаний электрона:

$$\frac{dW_\sigma(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{12\pi^4 c} \int_0^{2\pi} d\psi \varepsilon_1^2 \cdot K_{2/3}^2 \left( \frac{\omega}{3\omega_0} \varepsilon_1^{2/3} \right),$$

$$\frac{dW_{\pi}(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{12\pi^4 c} \int_0^{2\pi} d\psi \varepsilon_1 (\gamma + \alpha \cos \psi)^2 \cdot K_{1/3}^2 \left( \frac{\omega}{3\omega_0} \varepsilon_1^{3/2} \right), \quad (3)$$

где

$$\varepsilon_1 = 1 - \beta^2 + (\gamma + \alpha \cos \psi)^2, \quad \gamma = \frac{z_1}{R} \sin(\varphi_1 - \varphi_0) - \cos \theta,$$

$$\alpha = \sqrt{q} B/R, \quad \varphi_0 = \varphi(0).$$

Полученные выражения (3) уже не зависят от амплитуды радиальных свободных колебаний.

Для вычисления интегралов (3) представим функции Макдональда  $K_{1/3} \left( \frac{2}{3} x_1^{3/2} \right)$  и  $K_{2/3} \left( \frac{2}{3} x_1^{3/2} \right)$ ,

где  $x_1 = \varepsilon_1 (\nu/2)^{2/3}$ ,  $\nu = \omega/\omega_0$ , через функцию Эйри  $V(x_1)$  и ее производную  $V'(x_1)$  [10].

Тогда вместо (3) будем иметь

$$\frac{dW_{\sigma}(\nu)}{d\Omega} = W_1 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi V'^2(x_1),$$

$$\frac{dW_{\pi}(\nu)}{d\Omega} = W_1 \left( \frac{\nu}{2} \right)^{2/3} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi (\gamma + \alpha \cos \psi)^2 V^2(x_1), \quad (4)$$

где  $W_1 = 2^{1/3} c e^2 \nu^{2/3} / \pi^2 R^2$ . Представим  $x_1$  в виде  $x_1 = x + h$ , где  $x = \mu \varepsilon_2$ ,  $\mu = (\nu/2)^{2/3}$ ,  $\varepsilon_2 = 1 - \beta^2 + \gamma^2$ ,  $h = 2\mu\alpha \cos \psi + \mu\alpha^2 \cos^2 \psi$  ( $|h| \ll 1$ ).

Раскладывая  $V(x_1)$  и  $V'(x_1)$  в сходящиеся ряды [10] и проводя в (4) усреднение по фазе вертикальных колебаний  $\psi$ , получим для спектрально-углового распределения  $\sigma$ - и  $\pi$ -компонентов поляризации излучения:

$$\frac{dW_i(\nu)}{d\Omega} = W_1 \{F_i V'^2(x) + G_i V(x) V'(x) + P_i V^2(x)\}, \quad (5)$$

где  $i = \sigma, \pi$ ;

$$F_{\sigma} = 1 + x\bar{h}^2 + \frac{2}{3} \bar{h}^3 + \frac{x^2}{3} \bar{h}^4 + \frac{13x}{30} \bar{h}^5,$$

$$G_{\sigma} = 2x\bar{h} + \bar{h}^2 + \frac{4x^2}{3} \bar{h}^3 + \frac{3x}{2} \bar{h}^4 + \frac{6 + 4x^3}{15} \bar{h}^5,$$

$$P_{\sigma} = x^2 \bar{h}^2 + x\bar{h}^3 + \frac{3 + 4x^3}{12} \bar{h}^4 + \frac{x^2}{2} \bar{h}^5,$$

$$F_{\pi} = \bar{h}^3 + \frac{x}{3} \bar{h}^5 + \mu\gamma^2 \left( \bar{h}^2 + \frac{x}{3} \bar{h}^4 + \frac{1}{6} \bar{h}^5 \right),$$

$$G_{\pi} = 2\bar{h}^2 + \frac{4x}{3} \bar{h}^4 + \frac{1}{2} \bar{h}^5 + \mu\gamma^2 \left( 2\bar{h} + \frac{4x}{3} \bar{h}^3 + \frac{1}{2} \bar{h}^4 + \frac{4x^2}{15} \bar{h}^5 \right),$$

$$P_{\pi} = \bar{h} + x\bar{h}^3 + \frac{1}{3} \bar{h}^4 + \frac{x^2}{3} \bar{h}^5 + \mu\gamma^2 \left( 1 + x\bar{h}^2 + \frac{1}{3} \bar{h}^3 + \frac{x^2}{3} \bar{h}^4 + \frac{7x}{30} \bar{h}^5 \right).$$

Эти выражения записаны с точностью до  $\bar{h}^5$ , причем черта над  $h$  означает усреднение по  $\psi$ . Формулы (5) удобны в длинноволновой области

спектра, где  $v \ll (E/mc^2)^3$ , и при малых амплитудах бетатронных колебаний. Если параметр  $x$  — мал, то разложение в ряды можно провести другим образом (см., например, [10], формулы (1.7) — (1.11)).

На практике сдвиг секторов магнита ускорителя может быть различным. Для иллюстрации полученных формул рассмотрим несколько моделей, изображенных на рис. 1.

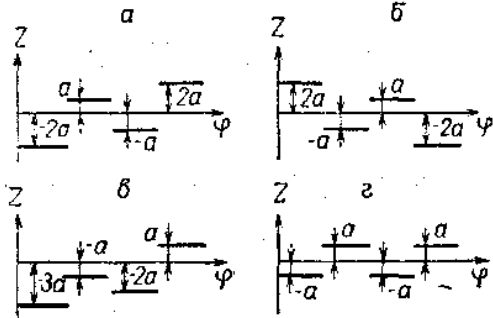


Рис. 1. Относительные сдвиги секторов магнита по вертикали

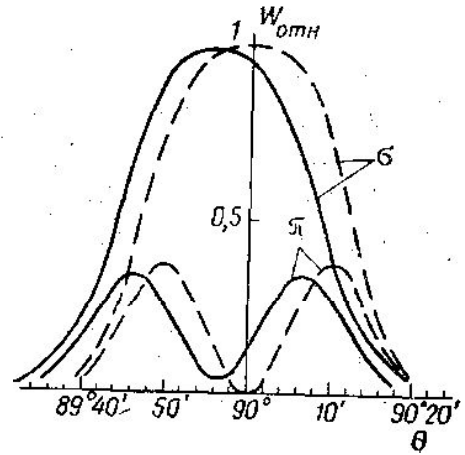


Рис. 2. Спектрально-угловое распределение  $\sigma$ - и  $\pi$ -компонентов линейной поляризации излучения. Штрихом обозначены кривые для однородного магнитного поля

Пусть сдвиг секторов задан рисунком 1, а, тогда коэффициент Фурье равен

$$H_1 = \frac{2q}{\pi} \frac{ab}{R^{q+1}}, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad a_0 = 0, \quad z_1 = \frac{2a}{\pi} \frac{q}{1-q},$$

$a = 1,5 \text{ мм.}$

Остальные параметры соответствуют синхротрону ФИАН:

$$R = 198 \text{ см, } q = 0,67, \quad E = 650 \text{ МэВ, } B = 2,13 \text{ мм.}$$

Указанная модель выбрана нами для упрощения расчетов и для выяснения только принципиальной стороны вопроса, хотя на самом деле медианная поверхность у этого ускорителя имеет более сложный вид [9]. Для данной модели с помощью (5) можно построить график спектрально-углового распределения  $\sigma$ - и  $\pi$ -компонентов поляризации излучения на длине волны  $\lambda = 4360 \text{ \AA}$  и при  $\varphi_0 = 0$  (рис. 2). Для сравнения на рис. 2 приведены соответствующие кривые для однородного магнитного поля (штрихованная линия).

Как видно, учет и бетатронных и вынужденных колебаний приводит к тому, что график спектрально-углового распределения линейных компонент поляризации смещается влево, при этом минимум  $\pi$ -компоненты не обращается в нуль. Если в формулах (5) положить  $z_1 = 0$ , т. е. не учитывать вынужденные колебания, то рассматриваемый график будет симметричен относительно  $\theta = 90^\circ$ . Если сдвиг секторов задать рисунком 1, б, то тогда  $\varphi_1$  изменит знак и график передвинется вправо симметрично приведенному. В общем случае формулы (5) дают максимум для  $\sigma$ -компонента и минимум для  $\pi$ -компонента при значениях угла  $\theta$ , определяемых из уравнения  $\cos\theta - (z_1/R) \sin(\varphi_1 - \varphi_0)$ .

Учет второй гармоники в формулах (1) и (2) принципиально не меняет всю картину. В этом случае  $y$  принимает вид

$$\gamma = \left(\frac{z_1}{R}\right) \sin(\varphi_1 - \varphi_0) + \left(2 \frac{z_2}{R}\right) \sin(\varphi_2 - 2\varphi_0) - \cos \theta$$

и, следовательно, сдвиг графика здесь будет больше на величину  $(2z_2/R) \sin(\varphi_2 - 2\varphi_0)$ , однако, как правило, основной вклад дает первая гармоника.

Рассмотрим теперь случай, когда сдвиг секторов относительно средней плоскости зазора ускорителя асимметричен (см., например, рис. 1, в), тогда в общем случае соответствующее решение для первой гармоники вынужденных колебаний  $z(\varphi) = a_0/2 + z_1 \cdot \cos(\varphi - \varphi_1)$  содержит постоянное отклонение  $a_0/2$ , а величина  $\gamma$  в формулах (3) — (5) не изменится. Наконец, для модели, изображенной на рис. 1, г, можно показать, что вклад дадут только вторые гармоники.

Приведем в заключение угловое распределение излучения, которое может быть получено путем суммирования выражения (3) по частотам и последующего усреднения по фазе вертикальных колебаний  $\psi$ :

$$\frac{dW_i}{d\Omega} = \frac{A_i}{3\pi\Delta^{3/4}} W_2 \left\{ D_i K(r) + E_i \frac{dK(r)}{dx} \right\}, \quad (6)$$

где

$$i = \sigma, \pi; A_\sigma = 14, A_\pi = 2; W_2 = \frac{ce^2}{32\pi R^2};$$

$$D_\sigma = 3 + \frac{\alpha^2}{\epsilon_0} + 16 \frac{\alpha^2 \gamma^2}{\Delta},$$

$$E_\sigma = 4 \frac{\alpha^2}{\Delta^{1/2}} \left[ 2(\alpha^2 + \epsilon_0)^2 - 2\gamma^4 + \frac{\Delta}{\epsilon_0} (\alpha^2 - \gamma^2) \right],$$

$$D_\pi = \frac{\alpha^2}{\epsilon_0} + \frac{1}{\Delta} [8\alpha^2(\alpha^2 + \epsilon_0) - 25\gamma^2\alpha^2 + 15\gamma^2(\epsilon_0 + \gamma^2)] + \\ + 8 \frac{\alpha^2 \gamma^2}{\Delta^2} [9(\alpha^2 - \gamma^2)^2 - 7\epsilon_0^2 + 2\epsilon_0(\alpha^2 + \gamma^2)],$$

$$E_\pi = 2 \frac{\alpha^2}{\Delta^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{2}{\epsilon_0} (\alpha^2 - \gamma^2) + \frac{1}{\Delta} [4(\alpha^4 - \epsilon_0^2) + \right. \\ \left. + 3(\alpha^2 - 7\epsilon_0)\gamma^2 - 7\gamma^4] + 8 \frac{\epsilon_0 \gamma^2}{\Delta^2} [7(\epsilon_0 + \gamma^2)^2 - 9\alpha^4 - 2\alpha^2(\epsilon_0 - \gamma^2)] \right\}.$$

В формулах (6)  $K(r)$  — полный эллиптический интеграл,

$$r^2 = x = \frac{1}{2} - \frac{\epsilon_0 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\Delta^{1/2}}, \quad \Delta = (\epsilon_0 + \gamma^2 + \alpha^2)^2 - 4\alpha^2\gamma^2, \quad \epsilon_0 = 1 - \beta^2.$$

Отметим роль вынужденных радиальных колебаний. Аналогичным образом можно рассматривать искажения магнитной медианной поверхности по радиусу. Проведенный анализ показал, однако, что в конечном итоге формулы спектрально-углового распределения интенсивности излучения не будут зависеть от амплитуд как свободных, так и вынужденных радиальных колебаний.

Из вышесказанного можно сделать вывод, что, во-первых, вертикальные бетатронные колебания меняют характер поведения кривых углового и спектрально-углового распределения [4], при этом, в частности,  $\pi$ -компонент не обращается в нуль при  $\theta = 90^\circ$ ; во-вторых, вынужденные колебания, связанные с азимутальной асимметрией фокусирую-

шего поля, приводят к сдвигу распределений по углу  $\theta$  относительно средней магнитной плоскости  $\theta=90^\circ$ .

В заключение авторы благодарят А. А. Соколова за постоянное внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сб. «Синхротронное излучение в исследовании твердых тел». Под ред. А. А. Соколова. М., 1970.
2. Соколов А. А., Тернов И. М. ЖЭТФ, 31, 473, 1956.
3. Сб. «Синхротронное излучение». Под ред. А. А. Соколова, И. М. Тернова. М., 1966.
4. Жуковский В. Ч., Шишанин О. Е., ЖЭТФ, 61, 1371, 1971.
5. Жуковский В. Ч., Шишанин О. Е. «Изв. вузов», физика, № 3, 52, 1971.
6. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Теория циклических ускорителей. М., 1962.
7. Комар Е. Г. Ускорители заряженных частиц. М., 1964.
8. Рабинович М. С. «Труды ФИАН», т. 10, 23, 1958.
9. Шорин К. Н. «Труды IV межвузовской конференции по электронным ускорителям». М., 1964.
10. Яковлева Г. Д. Таблицы функций Эйри и их производных. М., 1969.

Поступила в редакцию  
25.1 1974 г.

Кафедра  
теоретической физики