Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1975

УДК 539.1.01

А. Б. КУКАНОВ, А. В. КОНСТАНТИНОВИЧ

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ОХВАТЫВАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ В КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Метод охватывающей поверхности, развитый в [1], применен для исследования излучения заряженной частицей в постоянных однородных параллельных электрическом и магнитном полях. Найдена мощность излучения. Случай излучения в постоянном электрическом поле рассмотрен как частный случай решенной задачи.

При математической интерпретации физических явлений большое значение имеет разработка точных методов расчета. Так, например, при интерпретации эффекта Вавилова — Черенкова вслед за работой [2], где были использованы асимптотические выражения для функций Ганкеля, в работе [3] на основе точных выражений для напряженностей полей была получена основная формула теории, определяющая интенсивность и спектральное распределение излучения. В дальнейшем точные методы расчета в теории излучения Вавилова — Черенкова применялись в [4—5] и других работах (см. обзор [6]). Точные методы в теории синхротронного излучения применялись в ряде работ (см., например, [1, 7, 8]). Особенность метода [1] состоит в том, что интенсивность излучения электрическим зарядом, движущимся по окружности или по спирали, подсчитывается через цилиндрическую поверхность, охватывающую траекторию излучателя, но не обязательно удаленную на бесконечно большое расстояние от него.

В теории излучения электрическим зарядом в постоянном электрическом поле точные методы расчета применялись в [9], однако прямой метод расчета в форме [1] в работе [9] не был изложен. Настоящая статья посвящена применению метода охватывающей поверхности [1] для исследования излучения заряженной частицей в постоянных однородных параллельных электрическом и магнитном полях.

Излучение электрическим зарядом в постоянных однородных параллельных электрическом и магнитном полях

Уравнения движения заряженной точечной частицы в постоянных и однородных электрическом $\mathbf{E}^{ext}$ и магнитном $\mathbf{H}^{ext}$ полях, направленных вдоль оси Oz, имеют следующий вид [10]:

$$x_p = \frac{cb}{\omega_0}\sin\left[\varepsilon \operatorname{Arsh}(at)\right],\ y_p = \frac{cb}{\omega_0}\cos\left[\varepsilon \operatorname{Arsh}(at)\right],\ z_p = \frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2+1}. \quad (1)$$

Здесь

$$a = \frac{ceE^{\text{ext}}}{\mathcal{E}_0},\quad b = \frac{p_0 c}{\mathcal{E}_0} = \frac{v_0}{c},\quad \varepsilon = \frac{H^{\text{ext}}}{E^{\text{ext}}},\quad \omega_0 = \varepsilon a = \frac{ceH^{\text{ext}}}{\mathcal{E}_0},$$

e — заряд частицы, $\mathcal{E}_0 = \sqrt{m_0^2 c^4 + p_0^2 c^2}$ — ее энергия в момент времени $t=0$, p_0 — постоянное значение проекции импульса на плоскость xy, c — скорость света в вакууме. Вводя замену переменной

$$\tau = \varepsilon \operatorname{Arsh}(at), \tag{2}$$

формулы (1) преобразуем к виду

$$x_p = \frac{cb}{\omega_0}\sin\tau,\quad y_p = \frac{cb}{\omega_0}\cos\tau,\quad z_p = \frac{c}{a}\operatorname{ch}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right). \tag{3}$$

Учитывая соотношение $\dfrac{d\tau}{dt} = \dfrac{\omega_0}{\operatorname{ch}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)}$, найдем компоненты вектора скорости в декартовых координатах

$$v_x = \frac{cb\cos\tau}{\operatorname{ch}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)},\quad v_y = -\frac{cb\sin\tau}{\operatorname{ch}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)},\quad v_z = \frac{c\operatorname{sh}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)}. \tag{4}$$

Нам понадобятся проекции вектора скорости в цилиндрических координатах (R, φ, z):

$$v_R = \frac{cb\cos(\varphi+\tau)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)},\quad v_\varphi = -\frac{cb\sin(\varphi+\tau)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)},\quad v_z = \frac{c\operatorname{sh}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)}. \tag{5}$$

Для определения скалярного потенциала Φ и составляющих вектор-потенциала $\mathbf{A}$ в цилиндрических координатах (R, φ, z) в случае параллельных полей мы имеем уравнения

$$\Box \begin{pmatrix} \Phi \\ A_R \\ A_\varphi \\ A_z \end{pmatrix} = 4\pi\rho \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{cb\cos(\varphi+\tau)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)} \\ -\dfrac{cb\sin(\varphi+\tau)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)} \\ \dfrac{c\operatorname{sh}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $\Box = \nabla^2 - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ — оператор Даламбера, ρ — плотность заряда, определяемая формулой

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p(t)). \tag{7}$$

Компоненты радиуса вектора $\mathbf{r}_p$ определяются формулами (1).

Выражения для запаздывающих потенциалов после перехода в пространстве волновых векторов **k** к цилиндрическим координатам (k, ψ, k_z) и интегрирования по ψ_∞ и k имеют вид

$$\Phi^{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{2\pi^2\omega_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_z \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \mathrm{ch}\left(\frac{\tau'}{\varepsilon}\right) \times$$

$$\times \exp\left\{ik_z\left[z - \frac{c}{a}\mathrm{ch}\left(\frac{\tau'}{\varepsilon}\right)\right] + i\frac{\omega}{a}\left[at - \mathrm{sh}\left(\frac{\tau'}{\varepsilon}\right)\right]\right\} \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{-im(\varphi+\tau')} \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2}\theta\left(\frac{|\omega|}{c} - |k_z|\right) J_m\left(\gamma_1\frac{cb}{\omega_0}\right) H_m(\gamma_1 R) \\ \theta\left(|k_z| - \frac{|\omega|}{c}\right) I_m\left(\gamma_2\frac{cb}{\omega_0}\right) K_m(\gamma_2 R) \end{pmatrix}; \quad (8)$$

$$\mathbf{A}^{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{2\pi^2\omega_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_z \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp\left\{ik_z\left[z - \frac{c}{a}\mathrm{ch}\left(\frac{\tau'}{\varepsilon}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + i\frac{\omega}{a}\left[at - \mathrm{sh}\left(\frac{\tau'}{\varepsilon}\right)\right]\right\}\left[b\cos(\varphi+\tau')\,\mathbf{i}_R - b\sin(\varphi+\tau')\,\mathbf{i}_\varphi + \mathrm{sh}\left(\frac{\tau'}{\varepsilon}\right)\mathbf{i}_z\right] \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{-im(\varphi+\tau')} \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2}\theta\left(\frac{|\omega|}{c} - |k_z|\right) J_m\left(\gamma_1\frac{cb}{\omega_0}\right) H_m(\gamma_1 R) \\ \theta\left(|k_z| - \frac{|\omega|}{c}\right) I_m\left(\gamma_2\frac{cb}{\omega_0}\right) K_m(\gamma_2 R) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где

$$\theta(s) = \begin{cases} 1, & s > 0. \\ 0, & s < 0. \end{cases} \quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (10)$$

$$H_m(\gamma_1 R) = i\frac{\omega}{|\omega|} J_m(\gamma_1 R) - N_m(\gamma_1 R), \quad (11)$$

J_m и N_m — функции Бесселя целого индекса соответственно 1-го и 2-го рода, I_m и K_m — соответственно функция Бесселя мнимого аргумента и функция Макдональда. В формулах (8)—(9)

$$R > \frac{cb}{\omega_0}. \quad (12)$$

Подсчитаем энергию, излучаемую частицей за время t от $-\infty$ до $+\infty$ через цилиндрическую поверхность с осью радиуса R, окружающую траекторию частицы. Имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t)\,dt = \frac{cR}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\,(E_\varphi H_z - E_z H_\varphi) =$$

$$= -\frac{cR}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left[\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi^{\text{ret}}}{\partial\varphi} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_\varphi^{\text{ret}}}{\partial t}\right)\left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RA_\varphi^{\text{ret}}) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{R}\frac{\partial A_R^{\text{ret}}}{\partial\varphi}\right) - \left(\frac{\partial\Phi^{\text{ret}}}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_z^{\text{ret}}}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial A_R^{\text{ret}}}{\partial z} - \frac{\partial A_z^{\text{ret}}}{\partial R}\right)\right]. \quad (13)$$

При $\frac{\omega^2}{c^2} \ll k_z^2$ интеграл (13) равен нулю. Для доказательства этого факта мы использовали свойства модифицированных функций Бесселя I_m и K_m, рекуррентные формулы, которым они удовлетворяют, свойства интегралов в симметричных пределах от четных и нечетных функций и аналогичные свойства для сумм. При $\frac{\omega^2}{c^2} \geqslant k_z^2$ проинтегрируем в (13) по t, z, φ, а затем с помощью полученных дельта-функций — по k_z' и ω'. Произведя в полученной формуле замену $k_z = \frac{|\omega|}{c}\cos\theta$, используя формулы

$$J_m(z) N_m'(z) - J_m'(z) N_m(z) = \frac{2}{\pi z}, \tag{14}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\tau'-\tau'')} J_m^2\left(\gamma_1 \frac{cb}{\omega_0}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \exp\left\{i\gamma_1 \frac{cb}{\omega_0}\left[\sin(\varphi+\tau') - \sin(\varphi+\tau'')\right]\right\}, \tag{15}$$

а также рекуррентные соотношения (8.471) [11], для функций Бесселя найдем, произведя замену переменных $\tau' = \varepsilon\eta'$, $\tau'' = \varepsilon\eta''$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,dt = \frac{e^2}{8\pi^2 a^2 c}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_{-\infty}^{\infty} d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\cdot\omega^2 \times$$
$$\times \exp\left\{i\frac{\omega b}{\omega_0}\sin\theta\left[\sin(\varphi+\varepsilon\eta') - \sin(\varphi+\varepsilon\eta'')\right] + i\frac{\omega}{a}\cos\theta(\operatorname{ch}\eta' -\right.$$
$$\left.- \operatorname{ch}\eta'') + i\frac{\omega}{a}(\operatorname{sh}\eta' - \operatorname{sh}\eta'')\right\}\{b^2\cos[\varepsilon(\eta'-\eta'')] -$$
$$- \operatorname{ch}(\eta'-\eta'') + [b\sin\theta\cos(\varphi+\varepsilon\eta'') + \cos\theta\operatorname{sh}\eta'' + \operatorname{ch}\eta'']\operatorname{ch}\eta'\}. \tag{16}$$

Проводя далее интегрирования в (16) по углу φ, затем по η', η'', найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,dt = \frac{2e^2}{\pi c a^2}\int_0^{\infty} d\omega\omega^2 \int_0^{\pi} d\theta\sin\theta \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{m\varepsilon\pi} \times$$
$$\times \left\{b^2 K_{im\varepsilon}^2\left(\frac{\omega}{a}\sin\theta\right) J_m'^2\left(b\frac{\omega}{\omega_0}\sin\theta\right) + K_{im\varepsilon}'^2\left(\frac{\omega}{a}\sin\theta\right) J_m^2\left(b\frac{\omega}{\omega_0}\sin\theta\right)\right\}. \tag{17}$$

При $b=0$ из формулы (17) следует результат (16′) работы [12].

Для нахождения углового распределения полной энергии излучения мы должны в (16) провести интеграцию сначала по ω, а затем по η' и η''. Мы будем иметь

$$a\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,dt = \frac{e^2 a^2}{32c}(1+b^2\varepsilon^2)\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sin^2\theta}\int_0^{2\pi} d\varphi\left\{\frac{4(1+2b^2\cos^2\varphi)}{(1-b^2\cos^2\varphi)^{5/2}} -\right.$$
$$\left. - \frac{b^2\varepsilon^2}{\gamma^2(1+b^2\varepsilon^2)}\frac{\cos^2\varphi}{(1-b^2\cos^2\varphi)^{5/2}} - \frac{1}{\gamma^2}\frac{1+4b^2\cos^2\varphi}{(1-b^2\cos^2\varphi)^{7/2}}\right\}. \tag{18}$$

Интеграции по θ и φ в последней формуле полностью разделяются. Интегрируя далее по φ, найдем угловое распределение полной энергии излучения по углу θ:

$$a\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(t)\,dt=\frac{2}{3}\frac{e^2a^2\gamma^2}{c}\int\limits_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sin^2\theta}\left\{\left[\left(\gamma^2+\frac{1}{16}\right)E\left(\frac{\pi}{2},b\right)-\frac{1}{2}F\left(\frac{\pi}{2},b\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\varepsilon^2\left[\left(\gamma^2-\frac{17}{16}\right)E\left(\frac{\pi}{2},b\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{9}{16}\gamma^{-2}\right)F\left(\frac{\pi}{2},b\right)\right]\right\}. \quad (19)$$

$F\left(\frac{\pi}{2},b\right)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-b^2\cos^2\varphi}}$, $E\left(\frac{\pi}{2},b\right)=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-b^2\cos^2\varphi}\,d\varphi$ — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода.

Полная энергия излучения рассматриваемого источника за бесконечное время представляет собой расходящийся результат. С физической точки зрения эта расходимость связана с модельностью рассматриваемой задачи. Постоянное и однородное электрическое поле задано во всем пространстве. Траектория представляет собой винтовую линию с радиусом $\frac{cp_0}{eH^{\text{ext}}}$ и монотонно возрастающим шагом, по которой частица движется с убывающей угловой скоростью $\tilde{\omega}=\frac{ceH^{\text{ext}}}{\mathscr{E}_{\text{кин}}}$, и стремящейся к c скоростью вдоль оси Oz [10]. В соответствии с [10] излагаемая теория применима при условии

$$\frac{F^{\text{ext}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ll\frac{m_0^2c^4}{e^3},$$

где F^{ext} — порядок величины внешнего поля в лабораторной системе отсчета, в которой частица с массой покоя m_0 движется со скоростью v. Причем при полях

$$F^{\text{ext}}\sim m_0^2c^3/\hbar e,\ \text{т. е. когда}\ \hbar\omega_{F^{\text{ext}}}\sim m_0c^2\left(\omega_{F^{\text{ext}}}=\frac{eF^{\text{ext}}}{m_0c}\right),$$

классическая электродинамика становится неприменимой вследствие квантовых эффектов.

Особый интерес представляет вычисление мощности излучения заряженной частицей в параллельных электрическом и магнитном полях. Вычислим следующий интеграл [13]:

$$\mathscr{P}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}u(t)\,dt. \quad (20)$$

Мы должны учесть интегральные представления для потенциалов (8)—(9), выражение для $u(t)$ из (13) и известную теорему о том, что предел произведения конечного числа переменных равен произведению их пределов [14] согласно формуле

$$\mathscr{P}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}u(t)\,dt=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}Q_1(t)\,dt\cdot\int\limits_{-T}^{T}Q_2(t')\,dt'\cdot\int\limits_{-T}^{T}Q_3(t'')\,dt''\right\}.$$

Здесь для краткости очевидные подынтегральные выражения мы обозначили Q_i. Вычисление $\lim\limits_{T\to\infty}\int\limits_{-T}^{T}Q_1(t)\,dt$ приводит к дельта-функции.

Дальнейшие интегрирования по промежуточным переменным проводим с учетом формулы

$$e^{-iz\sin\alpha} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\alpha} J_m(z) \tag{21}$$

и формул, получающихся из нее дифференцированием по параметрам. В отличие от случая вычисления глобальных потерь энергии на излучение, рассмотренного выше, характеризуемого бесконечными пределами интегрирования по переменным η' и η'' и аналогичного [6], при расчете мощности излучения целесообразно использовать при преобразованиях подынтегрального выражения смешанное дифференцирование по переменным η' и η''. Проводя интегрирование, например, по η', используя свойства дельта-функции $\delta(\eta'-\eta'')$ и интегрируя далее последовательно по φ, θ и η'', найдем окончательно выражение для мощности излучения зарядом в параллельных полях:

$$\mathscr{P} = \frac{2}{3}\frac{e^2a^2}{c}\frac{1}{(1-b^2)^2} + \frac{2}{3}\frac{e^2\omega_0^2}{c}\frac{b^2}{(1-b^2)^2}. \tag{22}$$

Случай электрического поля

Примем направление постоянного и однородного электрического поля $\mathbf{E}^{\text{ext}}$ за ось Oz. В качестве плоскости, в которой будет происходить движение заряда e, примем плоскость xz. Уравнения движения заряженной точечной частицы в таком поле запишем в виде

$$x_p = \frac{cb}{a}\operatorname{Arsh}(at),\ y_p = 0,\ z_p = \frac{c}{a}\left(\sqrt{a^2t^2+1}-1\right). \tag{23}$$

Дифференциальные уравнения для потенциалов, а также формулы для полной энергии и мощности излучения в рассматриваемом случае можно получить, если положить в формулах (6), (19)—(20), (22) $\varepsilon=0$. В настоящем пункте в плане развития применяемого метода мы хотим лишь заметить что при решении задачи об излучении зарядом в постоянном электрическом поле в качестве выражений для запаздывающих потенциалов вместо формул (8)—(9) следует взять следующие:

$$\Phi^{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \exp\left\{ik_z\left[z - \frac{c}{a}\left(\sqrt{a^2t'^2+1}-1\right)\right] - i\omega(t-t')\right\} \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\varphi}\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2}\,\theta\left(\frac{|\omega|}{c}-|k_z|\right) J_m\left(\gamma_1\frac{cb}{a}\operatorname{Arsh}(at')\right) H_m(\gamma_1 R) \\ \theta\left(|k_z|-\frac{|\omega|}{c}\right) I_m\left(\gamma_2\frac{cb}{a}\operatorname{Arsh}(at')\right) K_m(\gamma_2 R)\end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$\mathbf{A}^{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \exp\left\{ik_z\left[z - \frac{c}{a}\left(\sqrt{a^2t'^2+1}-1\right)\right] - i\omega(t-t')\right\}\left(\frac{b\cos\varphi}{\sqrt{a^2t'^2+1}}\mathbf{i}_R - \frac{b\sin\varphi}{\sqrt{a^2t'^2+1}}\mathbf{i}_\varphi + \frac{at'}{\sqrt{a^2t'^2+1}}\mathbf{i}_z\right) \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\varphi} \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2}\,\theta\left(\frac{|\omega|}{c} - |k_z|\right) J_m\left(\gamma_1 \frac{cb}{a}\,\mathrm{Arsh}\,(at')\right) H_m(\gamma_1 R) \\ \theta\left(|k_z| - \frac{|\omega|}{c}\right) I_m\left(\gamma_2 \frac{cb}{a}\,\mathrm{Arsh}\,(at')\right) K_m(\gamma_2 R) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где R в отличие от формулы (12) должно удовлетворять условию

$$R > \frac{cb}{a}\,\mathrm{Arsh}\,(at'), \quad (26)$$

а суммирование по индексу m в выражениях для энергии излучения следует производить с использованием

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z_1)\, J_m(z_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(z_1 - z_2)\cos\varphi}. \quad (27)$$

Метод потенциалов Лиенара — Вихерта

Изложим теперь расчет мощности излучения заряженной частицей в параллельных полях на основе решения Лиенара — Вихерта [10]: Вычислим следующий интеграл:

$$\frac{e^2}{4\pi c^3} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt \int d\Omega Q(t, \theta, \varphi),$$

$$Q(t, \theta, \varphi) = \frac{2(\mathbf{nw})(\mathbf{vw})}{c\left(1 - \frac{(\mathbf{vn})}{c}\right)^4} + \frac{\mathbf{w}^2}{\left(1 - \frac{(\mathbf{vn})}{c}\right)^3} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{nw})^2}{\left(1 - \frac{(\mathbf{vn})}{c}\right)^5}. \quad (28)$$

Проведем интегрирование по всем направлениям вектора $\mathbf{n}$, являющегося единичным вектором в направлении излучения [10]. Здесь t — время источника. Вводя новую замену переменной $at = \mathrm{sh}\,\eta$ и обозначая $T_1 = aT$, $\gamma^2 = (1 - b^2)^{-1}$, формулу (28) с учетом (4) преобразуем к виду

$$\mathscr{P} = \frac{e^2 a^2}{4\pi c} \lim_{T_1\to\infty} \frac{1}{2T_1} \int_{-\mathrm{Arsh}T_1}^{\mathrm{Arsh}T_1} d\eta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \times$$
$$\times \left\{ \frac{1 + b^2\varepsilon^2}{(\mathrm{ch}\,\eta - \mathrm{sh}\,\eta\cos\theta - b\sin\theta\cos\varphi)^3} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\gamma^2} \frac{(\mathrm{sh}\,\eta - \mathrm{ch}\,\eta\cos\theta)^2 + b^2\varepsilon^2\sin^2\theta\sin^2\varphi}{(\mathrm{ch}\,\eta - \mathrm{sh}\,\eta\cos\theta - b\sin\theta\cos\varphi)^5} \right\}. \quad (29)$$

Имеем

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \{\ldots\} = \lim_{q\to 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \times$$
$$\times \left\{ \frac{1 + b^2\varepsilon^2}{(q + \mathrm{ch}\,\eta - \mathrm{sh}\,\eta\cos\theta - b\sin\theta\cos\varphi)^3} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\gamma^2} \frac{(\mathrm{sh}\,\eta - \mathrm{ch}\,\eta\cos\theta)^2 + b^2\varepsilon^2\sin^2\theta\sin^2\varphi}{(q + \mathrm{ch}\,\eta - \mathrm{sh}\,\eta\cos\theta - b\sin\theta\cos\varphi)^5} \right\}. \quad (30)$$

После замены выражения в фигурных скобках эквивалентным выражением, содержащим частные производные по q от $(q+\operatorname{ch}\eta-\operatorname{sh}\eta\cos\theta-b\sin\theta\cos\varphi)^{-1}$, проводим интегрирование по φ, а затем по θ, используя следующий табличный интеграл:

$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{(q+\operatorname{ch}\eta-\cos\theta\operatorname{sh}\eta)^2-b^2\sin^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2\eta+b^2}}\ln\frac{q+\operatorname{ch}\eta+\sqrt{\operatorname{sh}^2\eta+b^2}}{q+ch\,\eta-\sqrt{\operatorname{sh}^2\eta+b^2}}. \quad (31)$$

Устремляя в полученном выражении $q\to 0$, получаем окончательный результат, пропорциональный $\operatorname{ch}\eta$. Далее следует учесть, что

$$\lim_{T_1\to\infty}\frac{1}{2T_1}\int_{-\operatorname{Arsh}T_1}^{\operatorname{Arsh}T_1} d\eta\operatorname{ch}\eta=1. \quad (32)$$

Окончательно для мощности излучения находим формулу (22). Интересно отметить, что мощность излучения электрическим зарядом в параллельных полях постоянна и складывается из мощности излучения в постоянном электрическом поле $\mathbf{E}^{\text{ext}}$ [15] и мощности излучения в постоянном магнитном поле $\mathbf{H}^{\text{ext}}$, причем последняя численно равна мощности излучения электрическим зарядом с энергией $\mathscr{E}_0$, вращающимся по окружности с угловой скоростью ω_0 (см., например, [6]).

Численные оценки

Представляет интерес численно оценить мощность излучения электроном в параллельных полях согласно формуле (22), При $b=0$ (движение электрона коллинеарно полям)

$$\mathscr{P}=\frac{2}{3}\frac{e^4}{m_0^2c^3}(E^{\text{ext}})^2=1{,}58\cdot 10^{-15}(E^{\text{ext}})^2 \text{ эрг/с}.$$

В случае электрического поля $E^{\text{ext}}=10^7$ $CGSE_E$ (порядка внутриатомного [16]) $\mathscr{P}=0{,}158$ эрг/с, а при $E^{\text{ext}}=2{,}6\cdot 10^{10}$ $CGSE_E$ [17 — 19] $\mathscr{P}=1{,}07\cdot 10^6$ эрг/с $\simeq 0{,}1$ вт. Пусть теперь $b\neq 0$. При $1-b^2\ll 1$ формулу (22) удобно записать в виде

$$\mathscr{P}\simeq\frac{2}{3}\frac{e^4}{m_0^2c^3}\left(\frac{\mathscr{E}_0}{m_0c^2}\right)^2\{(E^{\text{ext}})^2+(H^{\text{ext}})^2\}.$$

При $E^{\text{ext}}=10^7$ $CGSE_E$ и $H^{\text{ext}}=10^7$ э [20] и

$$\mathscr{E}_0=1 \text{ Гэв } \mathscr{P}=1{,}21\cdot 10^6 \text{ эрг/с}\simeq 0{,}1 \text{ вт}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов А. А., Гальцов Д. В., Колесникова М. М. «Изв. вузов», физика, № 4, 14, 1971.
2. Франк И. М., Тамм И. Е. ДАН СССР, 14, 107, 1937.
3. Tamm I. E. «J. of Phys.», 1, 439, 1939.
4. Иваненко Д. Д., Соколов А. А. Классическая теория поля. М.—Л., 1951.
5. Ситенко А. Г., Коломенский А. А. ЖЭТФ, 30, 511, 1956.
6. Болотовский Б. М. «Успехи физических наук», 75, 295, 1961.
7. Куканов А. Б. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 12, № 5, 606, 1971.
8. Константинович А. В., Ницович В. М. «Изв. вузов», физика, № 2, 59, 1973.
9. Куканов А. Б., Константинович А. В. ЖТФ, 43, 1778, 1973.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1973.

11. Градштейн И. С., Рыжик И. Н. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М., 1962.
12. Никишов А. И., Ритус В. И. ЖЭТФ, **56**, 2035, 1969.
13. Де Велис Дж., Рейнольдс Дж. Голография. М., 1970, стр. 35.
14. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 1. М.—Л., 1951.
15. Fulton T., Rohrlich F. «Ann. Phys.», **9**, 499, 1960.
16. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. М., 1961, стр. 222, 240.
17. Бункин Ф. В., Тугов И. И. ДАН СССР, **187**, 541, 1969.
18. Brezin E., Itzykson C. «Phys. Rev.», **2**, 1191, 1970.
19. Brezin E. These. Faculte des Sciences de Paris, 1970.
20. Erber T. Acta Phys. Austriaca. Suppl., No. 8, 323, 1971.

Поступила в редакцию
4.3 1974 г.

Кафедра
теоретической физики