Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1975

УДК 521:523.85

Ф. А. ЦИЦИН

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ФЕСЕНКОВА — ПАРЕНАГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ СЖАТИЯ ГАЛАКТИКИ

Выведена формула, определяющая сжатие Галактики по звездным подсчетам в двух произвольных направлениях в плоскости, перпендикулярной радиусу-вектору наблюдателя, что позволяет избежать необходимости использования звездных подсчетов в галактической плоскости, где поглощение света максимально.

1. Одной из важных задач звездно-астрономического исследования Галактики является нахождение ее эффективного сжатия по отношению к экваториальной плоскости. История этой проблемы насчитывает уже около двух веков. Первая, связанная с наблюдениями оценка сжатия Галактики, принадлежит, по-видимому, Ламберту. Он нашел для отношения малой оси Млечного Пути к большой (сжатие ε) значение порядка 1/10000... С современной точки зрения, степень уплощенности Галактики этой оценкой, конечно, чрезвычайно сильно преувеличена. Важно, однако, что это была вообще первая астрономическая оценка сжатия нашей звездной системы, — именно так, совершенно правильно интерпретировался Млечный Путь Ламбертом.

Следующие за ламбертовой основные попытки определения сжатия Галактики (В. Гершель, Зеелигер, Каптейн), имевшие в свое время большое значение, несут на себе печать общего недостатка, хотя между первой и последней из них и лежит целое столетие: они были весьма трудоемкими, громоздкими; эффективное сжатие Галактики определялось как один из результатов звездных подсчетов, охватывавших так или иначе значительную часть небесной сферы. При этом из-за неучета поглощения света все эти исследования приводили к ошибочному заключению о том, что Солнце находится вблизи центра звездной системы Млечного Пути. Уже поэтому соответствующие выводы о сжатии Галактики не могли не быть в значительной степени фиктивными.

Лишь открытие поглощения света в Галактике сделало возможным корректное определение эффективного сжатия нашей звездной системы. Однако в течение некоторого времени единственно известным и применявшимся методом оценки сжатия Галактики был путь лобовой атаки — массовых подсчетов звезд с последующим построением модели пространственного распределения их и т. д.

2. Неожиданно простой новый метод определения сжатия Галактики ε на основе звездных подсчетов был найден в 1940 г. В. Г. Фесен-

ковым [1]. Он доказал, что для некоторого специального (но представлявшегося достаточно правдоподобным и приемлемым для представления распределения звезд в Галактике) закона распределения плотности в звездной системе наблюдатель, расположенный в произвольной точке экваториальной плоскости звездной системы, может определить ее сжатие ε из звездных подсчетов *всего в двух направлениях* на небесной сфере. А именно для принятого закона распределения плотности и в предположении сфероидальности, подобия и подобного расположения слоев одинаковой плотности сжатие Галактики ε может быть вычислено по формуле

$$\varepsilon = \left(\frac{n_z}{n_\theta}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{1}$$

где n_z и n_θ — число звезд в одинаковых телесных углах в направлении, перпендикулярном галактической плоскости, и в направлении, лежащем в галактической плоскости перпендикулярно радиусу-вектору наблюдателя в Галактике.

Обозначив относительную концентрацию звезд n_z/n_θ через $K_{z,\theta}$, перепишем (1) в виде

$$\varepsilon = K_{z,\theta}^{1/3}. \tag{2}$$

3. В 1946 г. П. П. Паренаго опубликовал чрезвычайно широкое обобщение [2] результата В. Г. Фесенкова. А именно он доказал, что формула (1) справедлива не только при принимавшемся В. Г. Фесенковым частном законе распределения плотности, но и при *произвольном* (!) законе распределения плотности в Галактике (в рамках исходного предположения о сфероидальности и подобии изоденс).

Соотношение (1) (а точнее, эквивалентное ему, лишь несколько преобразованное) П. П. Паренаго назвал теоремой Фесенкова. Несомненно, что П. П. Паренаго счел необходимым выделить таким образом указанный результат из множества частных формул и соотношений звездной астрономии, это говорит о высокой оценке им этого метода определения сжатия Галактики.

В свете того широкого обобщения, которое П. П. Паренаго сообщил теореме Фесенкова, представляется резонным именовать обсуждаемый результат теоремой Фесенкова — Паренаго.

4. Отметим, что доказательство обобщенной теоремы, данное П. П. Паренаго, было довольно громоздким. Так, будучи изложенным в его известном «Курсе звездной астрономии» (2 изд.), оно занимало несколько страниц.

Автором этих строк был найден и опубликован [3] существенно более простой и короткий способ вывода результата Фесенкова — Паренаго. Доказательство теоремы заняло всего несколько строчек. Еще проще теорема Фесенкова — Паренаго может быть доказана следующим способом.

Пусть a — координата в θ-направлении, ω — телесный угол, в пределах которого производятся звездные подсчеты, ρ_a — плотность на сфероиде, имеющем в сечении θz-плоскостью большую полуось a. Очевидно, у эллиптического сечения этого сфероида θz-плоскостью:

$$z = \varepsilon a. \tag{3}$$

Имеем для отношения чисел звезд в элементарных объемах в z- и θ-направлениях

$$\frac{dn_z}{dn_\theta} = \frac{\rho_a dv_z}{\rho_a dv_\theta} = \frac{\omega z^2 dz}{\omega a^2 da} = \frac{(\varepsilon a)^2 d(\varepsilon a)}{a^2 da} = \varepsilon^3. \tag{4}$$

Вследствие подобия и подобного расположения сфероидов постоянной плотности следует, что и для полных чисел звезд в z- и θ-направлениях:

$$\frac{n_z}{n_\theta} = \varepsilon^3, \tag{5}$$

что эквивалентно (1) и (2).

5. Заметим, однако, что подобно классическим методам определения сжатия Галактики, метод Фесенкова — Паренаго содержит слабое место. А именно, наличие поглощения света звезд может приводить к очень значительным искажениям в оценке сжатия Галактики методом Фесенкова — Паренаго. Особенно неблагоприятным оказывается то, что одно из двух направлений звездных подсчетов (θ-направление) лежит в галактической плоскости, т. е. области наибольшей концентрации поглощающей материи. Отметим еще, что двузначность z- и θ-направлений в идеале позволяет обнаружить: несовпадение положения наблюдателя с плоскостью симметрии системы (по различию величины n_z в северном и южном направлениях), а также отсутствие θ-симметрии в системе (по различию n_θ в двух диаметрально противоположных направлениях, например, если наблюдатель находится на краю бара).

Однако в практической ситуации независимо от теоремы Фесенкова — Паренаго различие значений n_θ (как и n_z) в противоположных направлениях не может быть однозначно интерпретировано указанным образом (т. е. как свидетельство несфероидальности Галактики и т. д.), поскольку нельзя исключать возможности того, что эти различия вызваны не систематическими эффектами, а случайным (точнее, локальным) сгущением или разрежением звезд в каком-то из рассмотренных направлений.

Соответственно и различие четырех значений сжатия Галактики ε (из которых, впрочем, лишь два могут быть независимыми), получаемых при комбинировании попарно различных n_z и n_θ, в рамках результата Фесенкова — Паренаго не может дать какой-либо информации об отступлении Галактики от сфероидальной формы или о z-координате наблюдателя.

6. Возможно, однако, широкое обобщение теоремы Фесенкова — Паренаго, позволяющее в значительной степени избежать указанные в предшествующем пункте недостатки, а также уточнить сами предпосылки метода о сфероидальности изоденс и т. д.

Рассмотрим в системе, где поверхности одинаковой плотности являются подобными и подобнорасположенными сфероидами, два произвольных направления в θz-сечении. Пусть это будут радиусы-векторы r_1 и r_2, характеризующиеся соответственно галактической широтой b_1 и b_2. Пусть R_1 и R_2 — расстояния в этих направлениях от центра θz-сечения до его (эллиптической) границы. Остальные обозначения те же, что в п. 4.

Вследствие подобия и подобного расположения линий (эллипсов) постоянной плотности в этом сечении получим

$$\frac{dr_1}{dr_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{R_1}{R_2}. \tag{6}$$

В пределах бесконечно тонкого слоя с большими полуосями $(a,\ a+da)$:

$$\frac{dn_1}{dn_2}=\frac{\rho_a dv_1}{\rho_a dv_2}=\frac{\omega r_1^2\,dr_1}{\omega r_2^2\,dr_2}=\frac{r_1^2\,r_1}{r_2^2\,r_2}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3. \tag{7}$$

Благодаря подобию и подобному расположению эллипсов постоянной плотности отсюда следует, что и для полных количеств звезд в этих двух направлениях будет

$$\frac{n_1}{n_2}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3. \tag{8}$$

Обозначив величину n_1/n_2, относительную концентрацию звезд в двух этих направлениях, через $K_{1,2}$, придадим соотношению (8) форму

$$K_{1,2}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3. \tag{8a}$$

В θz-сечении с большой полуосью a для направления с галактической широтой b имеем координаты x и y точки эллипса:

$$x=r\cos b,$$
$$y=r\sin b. \tag{9}$$

Подставляя эти выражения x и y в уравнение эллипса θz-сечения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(\varepsilon a)^2}=1, \tag{10}$$

имеем

$$\frac{r^2\cos^2 b}{a^2}+\frac{r^2\sin^2 b}{\varepsilon^2 a^2}=1, \tag{11}$$

откуда для $r=r(\varepsilon,\ b)$ получаем

$$r(\varepsilon,\ b)=\frac{a}{\sqrt{\cos^2 b+\dfrac{\sin^2 b}{\varepsilon^2}}}. \tag{12}$$

Пользуясь этой формулой для $r_1=r_1(\varepsilon,\ b_1)$ и $r_2=r_2(\varepsilon,\ b_2)$, находим выражение для относительной концентрации в двух рассматриваемых направлениях:

$$K_{1,2}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3=\left(\frac{\cos^2 b_2+\dfrac{\sin^2 b_2}{\varepsilon^2}}{\cos^2 b_1+\dfrac{\sin^2 b_1}{\varepsilon^2}}\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{13}$$

откуда окончательно после простых выкладок

$$\boxed{\varepsilon=\sqrt{\frac{K_{1,2}^{2/3}\sin^2 b_1-\sin^2 b_2}{\cos^2 b_2-K_{1,2}^{2/3}\cos^2 b_1}}}. \tag{14}$$

Эта формула обобщает формулу (2), выражающую содержание теоремы Фесенкова — Паренаго, и позволяет находить сжатие ε звездной системы по звездным подсчетам в двух *произвольных* направлениях в

θz-плоскости (а также, например, по подсчетам *во многих* направлениях в θz-плоскости).

Нетрудно убедиться, что теорема Фесенкова—Паренаго (2) оказывается частным случаем результата (14) и получается из него в двойном пределе при $b_1 \to \frac{\pi}{2}$, $b_2 \to 0$.

7. В частности, (14) позволяет определять сжатие Галактики ε, как и теорема Фесенкова — Паренаго (2), по единичной паре звездных подсчетов, но уже не прибегая к использованию крайне искаженных поглощением света подсчетов в галактической плоскости.

Если в качестве опорного зафиксировать одно, а именно z-направление с малым поглощением света $\left(\text{т. е. } b_1 = \frac{\pi}{2},\ b_2 = b\right)$, формула (14) несколько упрощается и приобретает вид

$$\varepsilon = \sqrt{K_{z,b}^{2/3} - \sin^2 b}\, \sec b. \tag{15}$$

Впрочем, хотя при «правильном» распределении поглощающей материи в Галактике z-направление в наименьшей степени обременено поглощением, в реальной Галактике из-за неправильностей в распределении поглощения это может быть совсем не так. Наименьшим может быть поглощение в каком-то другом направлении (направлениях) в θz-плоскости («коридоры видимости» — выразительный термин Б. А. Воронцова-Вельяминова). Значения b_1 и b_2 можно выбрать именно соответствующими направлениями наименьшего поглощения в θz-плоскости.

Структура формулы (14) накладывает на выбор направлений b_1 и b_2 лишь следующие условия. Во-первых, два избираемые для определения ε направления не должны быть слишком близкими. В противном случае внутренняя точность, обеспечиваемая формулой (11), существенно понижается. Во-вторых избираемые направления не должны быть симметричными относительно z- или θ-оси или близкими к такой симметрии. (При точной симметрии или совпадении направлений формула вырождается и дает неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Это вполне естественно, так как подобная пара измерений в исходной модели со сфероидальными изоденсами эквивалентна двум повторным измерениям *в одном и том же* направлении, т. е. фактически *одному* измерению, которого, конечно, недостаточно для определения сжатия системы).

Впрочем, в действительности измерения в симметричных направлениях все же целесообразны для проверки степени точности исходных предположений о симметрии системы и о нулевом значении z-координаты наблюдателя.

Далее, проведенное обобщение в рамках предположения о *симметрии* системы дает возможность оценивать меру справедливости другого фундаментального предположения метода — постулата о сфероидальности и подобии поверхностей постоянной плотности в системе. Если, скажем, при монотонном изменении b_1 или b_2 находимое по формуле (14) сжатие ε будет испытывать систематический ход, то это откроет возможность и даст информацию для *уточнения* исходного предположения о *сфероидальности* изоденс.

Заметим еще, что как в оригинале (2), так и в обобщенной форме (14) теорема Фесенкова — Паренаго приложима к исследованию и отдельных *подсистем* в Галактике. Более того, именно исследование подсистем с их физически, кинематически и динамически более однородным составом представляется наиболее подходящей областью применения метода Фесенкова — Паренаго при изучении структуры Галактики. Кстати, в отношении индвидуальных подсистем резоннее и принятие такого исходного предположения метода, как представление о сфероидальности и подобии изоденс.

8. После проведения обобщения теоремы Фесенкова — Паренаго, выражаемого формулой (14), естественно возникает вопрос: а не возможно ли дальнейшее обобщение теоремы, т. е. нахождение сжатия системы ε по звездным подсчетам в двух *произвольных* направлениях (*вне* θz-плоскости)?

Существуют, однако, следующие ограничения для такого обобщения. С одной стороны, в центральной полусфере результаты звездных подсчетов существенно зависели бы от закона изменения плотности $\rho(R)$ в зоне с большими полуосями сфероидов-изоденс от $R_1 < R_0$ до R_0. В то же время результаты подсчетов в направлении антицентральной полусферы от вида закона распределения плотности $\rho(R)$ между изоденсами R_1 и R_0, очевидно, не зависели бы. Следовательно, *нельзя* в этом случае определить сжатие системы ε без задания закона распределения плотности (по меньшей мере в зоне между изоденсами в центральной полусфере R_1 (луч зрения касается) и в «солнечной» R_0.)

С другой стороны, в самом общем случае расположения луча зрения в сечении Галактики плоскостью lz (при $l \pm 90°$ — галактическая долгота) нарушается другое условие существования простой связи между относительными концентрациями звезд в этом и других направлениях — условие, лежащее в основе данного выше вывода теоремы. Это, согласно проведенным рассуждениям, постоянство угла между лучом зрения и изоденсами. Только в таком случае элементы объема, лежащие на луче зрения между изоденсами с различным R, входят в интеграл для n одинаковым образом (с одинаковым «весом»). А это необходимое условие существования не зависящей от закона распределения плотности связи между относительными концентрациями звезд и сжатием системы ε.

Итак, дальнейшее, расширяющее результат (14), обобщение теоремы Фесенкова — Паренаго в рамках ее предпосылок представляется невозможным.

Автор благодарен Т. В. Григорьевой, произведшей первые приложения изложенного здесь результата к имеющимся материалам звездных подсчетов, после чего оказалось возможным оценить практическую применимость теоремы Фесенкова — Паренаго.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фесенков В. Г. ДАН СССР, **29**, № 4, 1940.
2. Паренаго П. П. Курс звездной астрономии, 2-е изд. М.—Л., 1946, стр. 266—269.
3. Цицин Ф. А. «Астрономический журнал», **31**, № 1, 1954.

Поступила в редакцию
28.12 1973 г.

Кафедра
звездной астрономии