ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1975

УДК 530.12/532.12

Е. В. БЛЮДОВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

С единой точки зрения рассмотрены гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое взаимодействия.

Показана необходимость введения дополнительного взаимодействия. Выведены трансформационные свойства различных тензоров при преобразовании к равноускоренной системе отнесения.

При равноускоренном (по СТО) движении точка описывает гиперболу [1], т. е. окружность в пространстве Минковского, поэтому при переходе от инерциальной системы отсчета к равноускоренной каждая система, состоящая из прямых и окружностей, переходит в систему, состоящую из прямых и окружностей, — таким свойством обладает группа конформизмов [2] пространства Минковского. Однако преобразования подгруппы группы конформизмов, состоящей из трансляций и глобальной гомотетии, переводят каждую прямую в прямую и не могут быть связаны с ускорением. Можно исключить эту подгруппу, рассматривая эквиконформную группу — стационарную подгруппу некоторой гиперсферы, которую будем считать абсолютом, или бесконечно удаленной гиперсферой. Эквиконформная группа имеет инвариант двух точек: действительно, через каждые две точки можно провести лишь одну окружность, ортогональную абсолюту; причем всякое конформное преобразование сохраняет двойное отношение четырех точек на окружности, следовательно, в эквиконформном пространстве можно ввести гильбертову метрику [3]:

$$s = \frac{k}{2} \ln (A, B;\ M, N), \tag{1}$$

где A, B — рассматриваемые точки, M и N — точки пересечения такой окружности с абсолютом, k — масштабный коэффициент.

Эквиконформное пространство в смысле метрики (1) локально изометрично пространству Минковского. За жесткий стержень следует принять стержень, сохраняющий эквиконформный интервал между концами, который эквивалентен его длине в смысле трехмерного пространства Лобачевского. Если, воспользовавшись изоморфизмом группы Лоренца и группы движений пространства Лобачевского [4], рассматривать первую как линейное представление второй, то можно показать, что определенный выше жесткий стержень не претерпевает лоренцова

сокращения. Это означает, что физический вакуум определяется не как гиперплоскость в пространстве Минковского, а как гиперсфера в нем.

Так как группа конформизмов пространства ${}^1E_4$ изоморфна группе SO (2, 4), то эквиконформная группа изоморфна SO (2, 3), которую и будем рассматривать как линейное представление эквиконформной группы. Пять координат точки пространства ${}^2E_5$ являются однородными координатами точки пространства ${}^1EC_4$ — эквиконформного четырехмерного пространства индекса 1, причем функция, заданная на множестве точек ${}^1EC_4$, определяется как функция, заданная на множестве лучей представляющего пространства ${}^2E_5$.

При учете полевой плотности энергии каждый трехмерный элемент объема (вакуума) можно рассматривать как материальный объект, который может находиться в состоянии движения. На поле скоростей [1] таких элементов накладываются естественные условия непрерывности и дифференцируемости необходимое число раз. Теперь через каждую точку пространственно-временного континуума проходит одна мировая линия, а весь континуум является конгруэнцией мировых линий.

Введем в каждой точке пространственно-временного континуума локальный проективный репер. Саму эту точку будем считать реперной с координатами (1, 0, 0, 0, 0).

Пусть x_α (греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, а латинские — 1, 2, 3, 4) — координаты точки, $\dot{x}_\alpha$ — производные по некоторому параметру, определенному вдоль проходящей через нее мировой линии, тогда

$$\omega_{\alpha\beta} = x_\alpha \dot{x}_\beta - x_\beta \dot{x}_\alpha$$

суть плюккеровы координаты касательной к мировой линии в этой точке [2]. Плюккеровы координаты заданы с точностью до произвольного множителя и их можно нормировать условием $\omega^2_{\alpha\beta} = -1$. Преобразуя координаты точки к (1, 0, 0, 0, 0), найдем

$$\omega_{\alpha\beta\ (\text{при}\ \alpha,\beta\neq 0)} = 0,$$

$$\omega_{0i} = v_i,$$

где v_i — компоненты четырехмерного вектора скорости — единичного вектора касательной.

Локальное представление эквиконформной группы выделится, если в каждом локальном репере определить полярную корреляцию индекса 2 [3]. Наложим на корреляцию $g_{\alpha\beta}$ условия, определяемые полем $\omega_{\alpha\beta}$, а именно:

$$|g_{\alpha\beta}| = \text{const}, \tag{2}$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \omega_{\alpha\beta} = 0, \tag{3}$$

$$\nabla^\alpha \omega_{\alpha\beta} = 0. \tag{4}$$

Определенная в каждой точке корреляция совместно с системой локальных проективных реперов задает пространство эквиконформной связности, редуцируемое из пространства конформной связности [5] фиксацией одной координаты, причем свобода в выборе репера дает возможность построить его над произвольным римановым пространст-

[1] Поле скоростей можно определить как поле единичного времениподобного собственного вектора тензора энергии-импульса. Назовем систему отнесения, в которой направление этого вектора совпадает в данной точке с направлением оси времени, локально-сопровождающей.

вом. Пространство эквиконформной связности изоморфно пространству метрической связности ${}^2M_5$ [5].

Приведенное построение сводится к аппроксимации реального пространства-времени непрерывным семейством касательных пространств постоянной кривизны с заменой неевклидовой группы движений таких пространств ее линейным представлением.

§ 1. Уравнение структуры Э. Картана [6]

Отнесем исследуемое пространство ${}^2M_5$ к системе локальных ортонормированных реперов и выберем четыре антикоммутирующих элемента γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, удовлетворяющих условиям $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = -1$, $\gamma_4^2 = 1$, а также элемент $\gamma_0 = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$[1].

Векторы пространства ${}^3E_5$ будут представлены выражениями вида $\mathbf{A} = a^\alpha\gamma_\alpha$. Под агрегатом будем понимать формальную сумму различных поливекторов. Алгебра агрегатов может быть представлена алгеброй матриц четвертого порядка и притом с точностью до произвольного внутреннего автоморфизма, однозначно [7]. Произведения вида $\gamma_\alpha\gamma_\beta \ldots \gamma_\delta$ будем обозначать $\gamma_{\alpha\beta\ldots\delta}$. На алгебре агрегатов введем инволюционный антиавтоморфизм $A \to \bar{A}$, при котором каждый элемент γ_α меняет знак.

При эквиконформных преобразованиях пространства агрегаты преобразуются по закону $A' = ZA\tilde{Z}$, где A и A' — исходный и преобразованный агрегаты, Z — элемент спинорной группы $Z = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 \ldots \mathbf{A}_m$, нормированный условием $Z\tilde{Z} = 1$.

Не требуя априорно тензорного характера от величин, полученных дифференцированием, воспользуемся не ковариантными производными, а частными и введем агрегат П выражением

$$D\dot{V} = \Pi V, \text{ т. е.}$$

$$\Pi = D\dot{V}\tilde{V}, \tag{5}$$

где точка над символом означает действие оператора $D = i\gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$, а $V = \gamma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}$. В силу нормировки $V\tilde{V} = 1$. П удовлетворяет уравнению

$$D\dot{\Pi} = \tilde{\Pi}\Pi. \tag{*}$$

Действительно, дифференцируя (5) и учитывая нормировку, получим

$$D\dot{\Pi} = \tilde{\Pi}\Pi + D^2\ddot{V}\tilde{V},$$

но в силу (2), (3) $D^2\ddot{V} = 0$; следовательно, равенство (*) доказано.

Уравнение (*) содержит два утверждения: уравнение структуры Э. Картана и условия (2), (3).

§ 2. Физический смысл матрицы, представляющей агрегат П

Относительно группы Лоренца, подгруппы эквиконформной группы матрица П разлагается на неприводимые тензоры: скаляр, псевдоскаляр, вектор, бивектор и тривектор [8]. Выберем локальный репер так, чтобы в точке касания (1, 0, 0, 0, 0) $\omega_{\alpha\beta}$ имел бы лишь один отлич-

[1] i — «геометрическая» (*псевдо*скалярная) мнимая единица, здесь — пентавектор.

ный от нуля компонент $\omega_{04}=1$. Поскольку x_0 и v_4 в этом репере для данной точки экстремальны, то из (5), учитывая (4) и независимость v_i от x_0, найдем

$$\gamma_i \pi^i = \gamma_i \frac{\partial v^i}{\partial x_4}.$$

Следовательно, π^i есть компоненты четырехмерного вектора ускорения, который в силу принципа эквивалентности отождествим с напряженностью гравитационного поля. Будем обозначать их g^i.

Анализ всех возможных источников гравитации эквивалентен анализу всех возможных физических полей в данной точке пространства. Так как $D\dot{\Pi}$ содержит дивергенцию вектора с компонентами g^i, то член $\widetilde{\Pi}\Pi$ должен содержать квадраты напряженностей *всех* полей, обладающих гравитирующей пространственной плотностью энергии, и напряженности *всех* таких полей должны выражаться линейно через элементы матрицы, представляющей агрегат Π.

Относительно группы Лоренца напряженности электромагнитного поля образуют неприводимый тензор-бивектор, и, следовательно, они должны линейно выражаться только через бивекторные компоненты π_{ik} агрегата Π. Можно положить $\pi_i{}^k \sim h_l$, $\pi_{4i} \sim e_i$ (здесь $i, k, l=1, 2, 3$). Тогда, представляя бивектор π_{ik} трехмерными векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, из (*) с учетом, что в рассматриваемом репере $\frac{\partial \Pi}{\partial x_0}=0$, найдем

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_4} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_4} = \mathbf{j},$$
$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = \rho, \tag{6}$$

$\mathbf{j}$- и ρ-четыре компонента векторной (относительно ${}^1E_4$) части $\widetilde{\Pi}\Pi$, которые надо рассматривать как четырехмерный вектор плотности тока.

Из (6) видим, что плотность электрического заряда и тока линейно выражаются через билинейные формы напряженностей полей, аналогично выражению плотности энергии через квадратичные формы тех же напряженностей.

Тривекторные компоненты матрицы Π также входят в выражение для плотности энергии и поэтому должны рассматриваться как новое физическое поле. Обозначим $\pi_{ikl}=s_m$ $(m\neq i, k, l)$. Рассмотрим частный случай обращения в ноль всех компонентов Π, кроме g_i и s_i, причем $i=1, 2, 3$.

Тогда для трехмерных векторов $\mathbf{G}$ и $\mathbf{S}$ из (*) имеем

$$\operatorname{rot}\mathbf{G} - \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_4} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{S} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_4} = 0,$$
$$\operatorname{div}\mathbf{G} = \mathbf{G}^2 - \mathbf{S}^2, \qquad \operatorname{div}\mathbf{S} = \mathbf{GS}. \tag{7}$$

Поле, удовлетворяющее подобным уравнениям, рассматривалось в [9, 10]. Назовем его спиновым полем. Ему соответствует дополнительное взаимодействие движущихся масс[1]. Экспериментально S-поле проявляется, например, как спин-спиновое взаимодействие в ядерных силах.

[1] Известно, что максвеллизация гравитационных уравнений дает возможность описывать эффекты, предсказываемые ОТО с точностью до первых порядков величин. Уравнения (7) максвеллизованы и нелинейны, что позволяет ожидать еще большего сближения с классической теорией гравитации ОТО. Так как уравнения (7) имеют локальный характер и относятся к касательному пространству, то такое согласование с ОТО можно считать достаточным.

Из (7) следует, что пространственная плотность энергии, создаваемая гравитационным и спиновым полями, отрицательна, и это естественно, ибо при сближении гравитирующих тел их потенциальная энергия не возрастает, как в случае одноименных электрических зарядов, а убывает.

Если сильное и слабое взаимодействие элементарных частиц обладает гравитирующей пространственной плотностью энергии, то их напряженности также должны линейно выражаться через неприводимые тензоры, входящие в матрицу П, тогда они пропорциональны скалярной и псевдоскалярной части агрегата П.

Итак, относительно группы Лоренца поле, представляемое агрегатом П, разлагается по неприводимым тензорам на пять самостоятельных полей: сильное, слабое, гравитационное, электромагнитное и спиновое. Это разложение сохраняется лишь во взаимно инерциальных системах отсчета. Относительно эквиконформной группы, содержащей преобразования к ускоренным системам отсчета, П разлагается лишь на три неприводимых тензора (скаляр, бивектор и тетравектор), определяющие три самостоятельных поля: сильное, электромагнитно-спиновое и гравитационно-слабое.

Электрический заряд как интеграл от плотности тока по бивекторным ортогональным дополнениям к элементам объема преобразуется как пятый компонент тетравектора и меняет знак при каждом отражении.

Можно рассмотреть закон преобразования матрицы П и относительно полной конформной группы, для чего достаточно расширить спинорную группу до множества всех агрегатов, удовлетворяющих соотношению $Z\tilde{Z}=1$. Здесь П состоит лишь из двух неприводимых тензоров: скаляра и пятнадцатикомпонентного бивектора шестимерного пространства, все поля, кроме сильного, преобразуются друг через друга. Относительно группы более общей, чем конформная, П вообще не разлагается на неприводимые тензоры и можно говорить лишь о едином шестнадцатикомпонентном поле.

§ 3. Сферически-симметричное стационарное гравитационное поле

Пусть П содержит только тетравектор, причем $\frac{\partial g_i}{\partial x_4}=0$, $\frac{\partial g_0}{\partial x_0}=g_0^2$, тогда можно воспользоваться трехмерным вектором с координатами g_1, g_2, g_3 и из (*) записать

$$\operatorname{div}\mathbf{G}=\mathbf{G}^2$$

(везде скорость света равна 1, гравитационная постоянная равна $\frac{1}{2\pi}$ и постоянная Планка равна 1). Для сферически симметричного поля в сферических координатах имеем уравнение

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 g_r)=g_r^2.$$

Его решением является

$$g_r=\frac{c}{r^2}\left(\frac{r}{c-r}\right). \tag{8}$$

Константу c определим, потребовав, чтобы g_r на бесконечности асимптотически стремилась к $\frac{m}{r^2}$, где m — масса «частицы». Тогда

$c=m$. Это решение вне сферы радиуса m близко к шварцшильдовому, внутри же этой сферы существенно отличается от него.

Для заряженной частицы, полагая $c=m+iq$ (где q — ее заряд), в левой части решения (8) будем иметь вектор $\mathbf{G}+i\mathbf{E}$.

Интеграл по всему трехмерному объему от div $\mathbf{G}$ сходящийся, он равен

$$\int\limits_v \operatorname{div} \mathbf{G} dv = 4\pi \int\limits_v \frac{1}{\left(1-\frac{r}{m}\right)^2} \sin\theta d\theta d\varphi dr = m. \tag{9}$$

Из (9) следует, что сферически симметричное стационарное поле, как модель элементарной частицы, может быть построено без сосредоточенной внеполевой материи. При комплексной c, сходимость интеграла снимает известное противоречие классической электродинамики.

Конформным преобразованием координат из (8) может быть получен ряд решений, имеющих точечную сингулярность, но не обладающих центральной симметрией.

§ 4. Квантование полей

Элементы γ_α являются линейными операторами в пространстве спиноров. Рассматривая применение этих операторов как линейное преобразование спин-базиса, можно считать их операторами в бесконечномерном пространстве всевозможных спинтензоров, абстрагируясь при этом от какой-либо конкретной матричной реализации.

Пусть $\lambda_m(\mathbf{x})$ — собственные значения оператора $\Pi(\mathbf{x})$, тогда его можно разложить по проекторам

$$\Pi(\mathbf{x}) = \lambda_m(\mathbf{x}) P^m(\mathbf{x}).$$

Подставляя это разложение в (*), получаем квазилинейное уравнение для проекторов

$$D\cdot\{\lambda_m(\mathbf{x}) P^m(\mathbf{x})\} = \overset{*}{\lambda}_m(\mathbf{x}) \lambda_m(\mathbf{x}) P^m(\mathbf{x}). \tag{10}$$

Значение инварианта поля, совпадающего с плотностью энергии в сопровождающей системе координат, записывается как $\sum\limits_m \overset{*}{\lambda}_m \lambda_m$ и не зависит от P^m. Проекторы же определяют все трансформационные свойства полей и, следовательно, их индивидуальность.

Будем теперь считать $\lambda_m(\mathbf{x})$ известными функциями, удовлетворяющими уравнению (10), и заменим их ступенчатой аппроксимацией с фиксированной точностью $|\Delta\lambda|\ |\Delta\mathbf{x}|=1$, тогда внутри каждой ступеньки уравнение (10) распадается на ряд самостоятельных линейных уравнений для P^m:

$$DP^m(\mathbf{x}) = \bar{\lambda}^*_m P^m(\mathbf{x}) \qquad \text{(без суммирования)}. \tag{11}$$

Каждый проектор вполне определен набором собственных функций $\psi_{ml}(\mathbf{x})$; нетрудно показать, что при соответствующей нормировке (собственные функции определены с точностью до умножения на произвольную скалярную функцию от $\mathbf{x}$) они удовлетворяют тому же уравнению (11), решением которого являются гармонические волны, локализованные в той окрестности точки $\mathbf{x}$, по которой проведено усреднение. Значит, фактически эти решения являются волновыми пакетами. В результате имеем разложение поля Π на пакеты элементарных волн

со средней частотой $\bar{\lambda}_m$. Амплитуда $\bar{\lambda}$ в (11) теперь лишь задает количество квантов с частотой $\bar{\lambda}$ в элементарном объеме. Из плотности $\bar{\lambda}^*\bar{\lambda}$ определяем энергию $(\bar{\lambda})$, которую следует приписать каждому кванту. Такое искусственное введение энергии кванта является следствием искусственной линеаризации уравнений; для строгих же нелинейных решений квантование теряет смысл.

Рассмотрим транформационные свойства собственных функций, соответствующих каждому неприводимому полю. Будем предполагать, что в Π существенно отличаются от нуля лишь компоненты одного поливектора. Тогда уравнение $\Pi\psi=\lambda\psi$ имеет решение в следующих подпространствах спинтензоров. Для тетравектора: при действительном λ — бивектор (гравитон, спин 2), при мнимом λ — спинор (нейтрино, спин 1/2), при сужении на SO (1, 3) спинор распадается на два неэквивалентных; для бивектора: при действительном λ — вектор (фотон), при мнимом λ — спинтензор третьего ранга (спин 3/2, Ω ?); для скалярного поля решения могут иметь произвольный ранг, простейшее из них — скаляр (π-мезон).

§ 5. Уравнение Дирака

Определим пробную частицу уравнением

$$\lambda^*(\mathbf{x})\,\lambda(\mathbf{x}) = m\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0),$$

тогда при $\mathbf{x}\neq\mathbf{x}_0$ имеем $D\psi=0$. Разделением переменных это уравнение приводится к виду

$$\left(\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{i}{\Lambda}\gamma_0\right)\varphi=0. \tag{12}$$

Уравнение (12) не отличается от уравнения Дирака для свободной частицы, если Λ — комптоновская длина волны.

Решения уравнения (12) не эквиконформно ковариантны, они становятся таковыми после домножения на частное решение отщепленного уравнения $\psi=\varphi e^{-i\frac{x_0}{\Lambda}}$. Воздействие внешнего поля можно заменить переходом к ускоренной (локально) системе координат, тогда (12) перейдет в

$$\left(\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}+u^i\gamma_i-\frac{i}{\Lambda'}\gamma_0\right)\varphi=0,$$

где вектор $u^i\gamma_i$ имеет смысл вектор-потенциала, и Λ' — некоторая новая длина волны. Так как $i\psi^*\gamma_0\gamma_4\frac{\partial}{\partial x_0}\psi$ — плотность энергии, то тривектор $\psi^*\left[i\gamma_\alpha\gamma_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}\right]\psi$ — эквивалент тензора энергии импульса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Паули В. Теория относительности. М., 1947, стр. 113.
2. Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии, гл. 3, § 2, 6, 12; гл. 4, § 1, 2, 3. М., 1955.
3. Буземан Г., Кэлли П. Проективная геометрия и проективные метрики, гл. 4, § 28. М., 1957.
4. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро Э. Я. Представления группы вращения и группы Лоренца, их применения, ч. 2, гл. I. М., 1958.

5. Картан Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань, 1962, стр. 38—47 и 121—128.
6. Картан Э. Теория конечных непрерывных групп и аналитическая геометрия, изложенная методом подвижного репера. М., 1963.
7. Рашевский П. К. «Успехи математических наук», 1, вып. 2, 1964.
8. Картан Э. Теория спиноров. М., 1947, § 48, 98.
9. Carstoin J. «C.—R. Acad. sci.», **268A**, 201—204, 1964.
10. Carstoin J. «C.—R., Acad. sci.», **268**, A261—264, 1968.

Поступила в редакцию
4.9 1973 г.

НИИЯФ