а также при $n > 2$:

$$\sigma_{\perp}^{\pm n} = \left(\frac{e\mu}{\hbar c}\right)^2 \gamma^{2n} \frac{4\pi\,[(2n)!]^2\,(2n-1)!}{(n!)^4\,(4n)!} \times$$

$$\times \left\{ \frac{2\,[(2n+1)\,m_y^2 + m_x^2]}{(n+1)\,(4n+3)\,(4n+2)}\,(1 \pm (2n+1)\,\delta) \mp \delta\, m_x m_y \right\},$$

$$\sigma_{\parallel}^{\pm n} = \left(\frac{e\mu}{\hbar c}\right)^2 \gamma^{2n} \frac{\pi\,[\mathbf{mn}]^2}{(n!)^2\, n\,(2n+1)} \left[1 \pm \frac{\delta n\,(2n+1)}{(2n-1)}\right]. \qquad (7)$$

Используя (6), а также аналогичное выражение для нелинейных поправок к сечениям одноквантового процесса $\sigma^{\pm 1}$, можно посчитать первую поправку $\Delta\sigma \sim \gamma^4$ к полному сечению поглощения в случае $\mathbf{e} \perp \mathbf{n}$, которая, однако, исчезает при усреднении по направлению $\mathbf{m}$:

$$\Delta\,\sigma_{\perp} = \left(\frac{e\mu}{\hbar c}\right)^2 \gamma^4 \xi\, \frac{3\pi}{2}\, m_x m_y \ln 2.$$

В случае сильного поля излучения мы ограничимся здесь выражением для сечения излучения при $\zeta = \gamma\xi \gg 1$ и $(\mathbf{en}) = 1$. В этом случае во всей области интегрирования по dO_p, можно пользоваться усредненной по осцилляциям асимптотикой для $J_n^2(x) \to 1/\pi x$:

$$\sigma^{-n} = \left(\frac{e\mu}{\hbar c}\right)^2 \frac{[\mathbf{mn}]^2}{\gamma\delta} \left(\sqrt{1-2\delta} + \delta \ln\left(\frac{1-\sqrt{1-2\delta}}{1+\sqrt{1-2\delta}}\right)\right).$$

Для других значений параметров вычисления носят полукачественный характер, так как приходится использовать различные асимптотики функций Бесселя в различных областях интегрирования.

Как следует из предыдущего рассмотрения, нелинейный тормозной эффект на магнитном моменте существенным образом отличается от аналогичного процесса на кулоновском центре. Это связано с относительной малостью константы взаимодействия между магнитным моментом и зарядом, а также с различным поведением соответствующих потенциалов взаимодействия на бесконечности. В случае наличия у рассеивающего центра заряда и магнитного момента, для нерелятивистской задачи последним можно пренебречь [3].

В заключение авторы выражают благодарность участникам семинара проф. А. А. Соколова за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бункин Ф. В., Федоров М. В. ЖЭТФ, **49**, 1215, 1965.
2. Бункин Ф. В., Казаков А. Е., Федоров М. В. «Успехи физических наук», **107**, 560, 1972.
3. Павленко Ю. Г., Волощенко А. М., Гуминов Е. Н. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., **16**, № 2, 239, 1975.

Поступила в редакцию
26.3 1975 г.

Кафедра
теоретической физики

УДК 539.182; 517.564

Ю. Б. ЧЕРНЯК

ОБ АСИМПТОТИКЕ ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Решение поставленной задачи важно для анализа собственных функций и спектра уравнения Шредингера в потенциалах, отличающихся от кулоновского лишь на больших расстояниях от центра. Стандартное разложение [1]) при $|x| \to \infty$

$$\Phi(a, c; x) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} \left(\frac{e^{i\eta\pi}}{x}\right)^{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (a-c+1)_n}{n!\,(-x)^n} +$$

$$+ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^{x} x^{a-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c-a)_n (1-a)_n}{n!\, x^n}; \qquad (1)$$

$$[\eta = \operatorname{sign}(Im\, x) = \begin{cases} 1, & Im\, x > 0 \\ -1, & Im\, x < 0 \end{cases}$$

недоопределено при $Im\, x=0$.

Это обычно не приводило к затруднениям, так как система функций сравнения в первом и втором слагаемых в (1) отличается экспоненциальным множителем и, например, при $Re\, x>0$ достаточно учитывать вторую сумму. Другая ситуация возникает, когда $x \to +\infty$, а первый индекс $\Phi(a, c; x)$ близок к неположительному целому числу: $a=-n+\varepsilon$, $\varepsilon=0(1)$. В этом случае множитель $[\Gamma(a)]^{-1} \sim \varepsilon$, и при различных соотношениях между ε и x в асимптотику Φ может давать вклад любая из сумм в (1), или обе вместе при $\varepsilon \sim e^{-x}$. С другой стороны, при $a \to -n$ первая сумма в (1) превращается в точную формулу для $\Phi(-n, c; x)$, а вторая исчезает. При этом стремление $\Phi(a, c; x)$ к $\Phi(-n, c; x)$ по (1) происходит от комплексных значений Φ к вещественным, в то время как при вещественных a, c и x Φ — вещественна. Таким образом, необходимо построить такую асимптотическую формулу для $\Phi(a, c; x)$ при $x \to \infty$, которая описывала бы плавный переход от экспоненциальной асимптотики к полиномиальной при $a \to -n$, и для вещественных a, c и x всюду давала бы вещественные значения для функции $\Phi(a, c; x)$. Аналогичная задача возникает при $x \to -\infty$, $c-a \to -n$.

Рассмотрим сначала область $0<Re\, a<Re\, c<2$, в которой справедливо интегральное представление

$$\Phi(a, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{xt} (1-t)^{c-a-1} t^{a-1}\, dt. \qquad (2)$$

Если $Im\, x \geqslant 0$, то контур в (2) можно преобразовать в две полупрямые $(0, i\infty)$ и $(i\infty+1, 1)$. Если же $Im\, x \leqslant 0$, то контур можно сдеформировать в две вертикальные полупрямые в нижней полуплоскости $(0, -i\infty)$ и $(1-i\infty, 1)$.

Сделав очевидные замены переменных в полученных таким путем интегралах, найдем, что при $Im\, x=0$ одновременно справедливы равенства:

$$\Phi(a, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \left\{ e^{\frac{i\pi a}{2}} \int_0^{\infty} e^{ix\tau} \tau^{a-1} (1+i\tau)^{c-a-1} d\tau + \right.$$

$$\left. + e^{x + \frac{i\pi(a-c)}{2}} \int_0^{\infty} e^{ix\tau} (1+i\tau)^{a-1} \tau^{c-a-1}\, d\tau \right\}, \qquad (3)$$

$$\Phi(a, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \left\{ e^{-\frac{i\pi a}{2}} \int_0^{\infty} e^{-ix\tau} \tau^{a-1} (1-i\tau)^{c-a-1} d\tau + \right.$$

$$\left. + e^{x - \frac{i\pi(a-c)}{2}} \int_0^{\infty} e^{-ix\tau} (1-i\tau)^{a-1} \tau^{c-a-1} d\tau \right\}. \qquad (3')$$

Правые части (3) и (3′) комплексно сопряжены при вещественных a, c и x. Будем говорить, что (3) и (3′) «комплексно сопряжены по явно входящему i».

Введем оператор $\widehat{Re}$ взятия вещественной части «по явно входящему i», тогда (3) и (3′) при $Im\, x=0$ можно объединить:

$$\Phi(a, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}\,\widehat{Re}\,\left\{e^{\frac{i\pi a}{2}}\int\limits_0^{\infty} e^{ix\tau}\,\tau^{a-1}(1+i\tau)^{c-a-1}\,d\tau + \right.$$

$$\left. + e^{x+i\frac{\pi(a-c)}{2}}\int\limits_0^{\infty} e^{ix\tau}(1+i\tau)^{a-1}\,\tau^{c-a-1}\,d\tau\right\}. \tag{4}$$

Для получения асимптотической формулы воспользуемся интегрированием по частям или следующей эквивалентной, но более удобной теоремой [2].

Для N раз дифференцируемой функции $\varphi(t)$ с $\varphi^{(n)}(\beta)=0$ при $n=0, 1, ..., N-1$; и $0<\lambda<1$ справедливо разложение

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{ixt}(t-\alpha)^{\lambda-1}\,\varphi(t)\,dt = -\sum_{n=0}^{N}\frac{\Gamma(n+\lambda)}{n!}\,e^{\frac{i\pi(n+\lambda-2)}{2}}\,x^{-(n-\lambda)}\,e^{ix\alpha}\,\varphi^{(n)}(\alpha) + O(x^{-N}). \tag{5}$$

Таким путем из (6) легко найдем при $x = Re\, x > 0$

$$\Phi(a, c; x) \sim \frac{\Gamma(c)\cos\pi a}{\Gamma(c-a)\,x^{a}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(1+a-c)_n}{n!\,(-x)^n} +$$

$$+ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\,e^{x}\,x^{a-c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c-a)_n\,(1-a)_n}{n!\,x^n}. \tag{6}$$

Заметим, что использование оператора $\widehat{Re}$ необязательно, можно было использовать (5) в формулах (3) и (3′) и затем перейти к (6).

Таким образом, при $0<Re\,a<Re\,c<2$ и $x=Re\,x>0$ оказывается справедливой формула (6), отличающаяся от (1) заменой $e^{\pm i a\pi}$ на $\cos a\pi$, которая и дает решение сформулированной выше задачи. Функция, соответствующая асимптотическому разложению (6), и ее производные удовлетворяют таким же рекуррентным соотношениям, как и функция, соответствующая (1), т. е. $\Phi(a, c; x)$, поскольку $\cos a\pi$ и $e^{i\eta\pi}$ одинаково ведут себя при изменении a на целое число. Такой инвариантности (6) при переходе к ассоциированным с $\Phi(a, c; x)$ функциям достаточно для аналитического продолжения этой формулы на все комплексные значения a и c. При $x=Re\,x<0$, что интересно рассматривать при $c-a\sim -n$, формулу (6) следует применить к преобразованной при помощи равенства Куммера $\Phi(a, c; x) = e^{-x}\Phi(c-a, c; -x)$ функции. В этом случае суммы в (6) меняются местами: $a \rightleftarrows c-a$ и опять возникает та же вещественная асимптотическая формула для Φ.

Таким образом, процедура нахождения асимптотики регулярной вырожденной гипергеометрической функции на вещественной оси сводится к подстановке в (1) $x=\pm|x|$ и взятию «вещественной части по явно входящему i». Найденная таким образом асимптотика является единственной, удовлетворяющей тождеству Куммера.

В заключение выражаю благодарность док. физ.-мат. наук В. С. Николаеву за стимулирующие дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., 1973.
2. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М., 1962.

Поступила в редакцию
4.10 1974 г.

НИИЯФ