Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1975

УДК 532.1

Л. А. ДИКИЙ, О. А. КЛИЦЕНКО

К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

Показано, что из устойчивости вращательно-симметричных возмущений течения идеальной жидкости в круглой трубе следует ограниченность скоростей несимметричных возмущений.

Как известно, для плоскопараллельного течения вязкой жидкости верна теорема Сквайра о том, что устойчивость двумерных возмущений гарантирует устойчивость возмущений трехмерных. Для плоскопараллельных течений идеальной жидкости теорема Сквайра верна лишь в сильно ослабленной форме: из устойчивости двумерных возмущений следует лишь ограниченность скоростей трехмерных возмущений, вихрь же растет во времени [1 и 2].

Если от плоскопараллельных течений перейти к более общим, например к течению в круглой трубе или между цилиндрами, то для вязкой жидкости теорема Сквайра полностью нарушается. Так, известно, что течение Куэтта между цилиндрами теряет устойчивость именно в третьем измерении, в то время как двумерные возмущения всегда устойчивы. Для круглой трубы есть веские основания считать, что вращательно-симметричные возмущения (аналог двумерных в этом случае) всегда устойчивы, что же касается несимметричных, то усилия исследователей направлены на построение примеров неустойчивости [3]. Если же от вязкой жидкости перейти к идеальной, то тот ослабленный вариант теоремы Сквайра, который имел место для плоскопараллельных течений, сохраняется и для круглой трубы. Если доказана устойчивость симметричных возмущений, то скорости несимметрических возмущений также ограничены. В этом и состоит настоящая статья. Метод будет полностью аналогичен развитому в [2].

Запишем линеаризованные уравнения движения в цилиндрических координатах r, θ, z, направив ось Oz по оси трубы. Компоненты скорости обозначим так: u — радиальный, v — в направлении роста полярного угла θ, w — по оси Oz. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+W\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial\theta},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + W\frac{\partial w}{\partial z} + uW' = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial v}{r\partial\theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$W' = \frac{dW}{dr}.$$

Здесь $W(r)$ — скорость основного течения на границе при условии $u(r_0)=0$. Рассматриваем возмущения, гармонически зависящие от координат θ, z, как $\exp[i(n\theta+kz)]$. Для амплитудных функций имеем

$$\begin{gathered} u_t + ikWu = -p_r/\rho, \\ v_t + ikWv = -inp/r\rho, \\ w_t + ikWw + W'u = -ikp/\rho, \\ (ru)_r/r + inv/r + ikw = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Перейдем к уравнениям для амплитудных функций компонентов вихря:

$$\rho_1 = inw/r - ikv, \quad \rho_2 = iku - w_r. \tag{3}$$

Дифференцируя эти выражения по t и воспользовавшись (2), получаем

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial}{\partial t} + i_kW\right)\rho_1 + \frac{in}{r}W'u = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + ikW\right)\rho_2 + \frac{in}{r}W'v - r\left(\frac{W'}{r}\right)'u = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + ikW\right)\rho_3 + ikW'v = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Некоторая линейная комбинация компонентов вихря выражается через u:

$$ikr\rho_2 - in\rho_3 - \frac{2nkr}{n^2+k^2r^2}\rho_1 = (ru)_{rr} + \\ + \frac{n^2-k^2r^2}{n^2+k^2r^2}\frac{(ru)_r}{r} - \frac{1}{r}(n^2+k^2r^2)u. \tag{5}$$

Берем соответствующую линейную комбинацию уравнений (4):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + ikW\right)\left[(ru)_{rr} + \frac{n^2-k^2r^2}{n^2+k^2r^2}\frac{(ru)_r}{r} - \frac{1}{r}(n^2+k^2r^2)u\right] - \\ - ik\left[r^2\left(\frac{W'}{r}\right)' + \frac{2n^2}{n^2+k^2r^2}W'\right]u = 0. \tag{6}$$

Заменой переменных удобно оператору по r, стоящему в первых квадратных скобках, придать самосопряженную форму. Для этого положим

$$u = a(r)\xi, \quad a(r) = \sqrt{(n^2+k^2r^2)/r^3}. \tag{7}$$

Для ξ получается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + ikW\right)(\xi_{rr} - \varphi(r)\xi) - ikc\xi = 0, \tag{8}$$

где

$$\varphi(r)=\frac{1}{4(n^2+k^2r^2)^2}\left[\frac{n^4}{r^2}(4n^2-1)+2n^2k^2(6n^2-5)+\right.$$
$$\left.+3r^2k^4(4n^2+1)+4r^4k^6\right] \tag{9}$$

и

$$c(r)=r\left(\frac{W'}{r}\right)'+\frac{2n^2W'}{r(n^2+k^2r^2)}=W''+\frac{n^2-k^2r^2}{r(n^2+k^2r)}W'. \tag{10}$$

Для функции $\varphi(r)$ сразу очевидна ее положительность для всех значений n и k. Что касается функции $c(r)$, то в дальнейшем мы будем предполагать, что она не обращается в нуль. Это условие полностью эквивалентно условию Релея об отсутствии точек перегиба у профиля скорости в плоскопараллельном случае, гарантирующем устойчивость двумерных возмущений. Для наиболее интересного параболического профиля

$$W=W_0(r_0^2-r^2)$$

имеем

$$c(r)=4W_0n^2/(n^2+k^2r^2). \tag{11}$$

При $n=0$ (вращательно-симметричные возмущения) $c(r)\equiv 0$. Для остальных n имеем $c(r)<0$. Для симметричных возмущений положение такое же, как для плоскопараллельного течения Куэтта — уравнение (8) вырождается

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+ikW\right)(\xi_{rr}-\varphi\xi)=0, \tag{12}$$

откуда

$$\xi_{rr}-\varphi(r)\xi=f(r)e^{-ikW(r)t}.$$

Таким образом, $\xi_{rr}-\varphi(r)\xi$ ограничено для всех t и равномерно относительно r. Нетрудно видеть, что и ξ ограничено. Для несимметричных возмущений, когда $c\neq 0$, получаем закон сохранения

$$\frac{d}{dt}\int_0^{r_0}\left\{|\xi_r|^2+\varphi|\xi|^2+\frac{W-K}{c(r)}|\xi_{rr}-\varphi\xi|^2\right\}dr=0, \tag{13}$$

где K — произвольная константа (этот закон можно непосредственно проверить). Интеграл в (13) есть функция только одного переменного t и d/dt — обыкновенная производная функции одного переменного. Константу K можно выбрать так, чтобы $(W-K)/c>0$. Отсюда получается ограниченность в среднем квадратическом величин $\xi/\sqrt{\varphi}$, ξ_r и $\xi_{rr}-\varphi\xi$. Из первого уравнения (4) и из (8) получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+ikW\right)\left[kc\rho_1+\frac{naW'}{r}(\xi_{rr}-\varphi\xi)\right]=0,$$

откуда

$$\rho_1=\frac{naW'}{kcr}(\xi_{rr}-\varphi\xi)+f(r)e^{ikWt}. \tag{14}$$

Поэтому ρ_1 ограничено в среднем квадратическом при всех t одной константой (все время предполагается, что начальные возмущения ограничены в том же смысле). Теперь из $u\sim r^{-3/2}\xi$

$$v = \frac{i}{k^2r^2 + n}[n(ru)_r - k^2\rho_1] \sim [kr(r^{-1/2}\xi)_r - nr\rho_1] \qquad (15)$$

и из ограниченности в среднем квадратическом $\xi/\sqrt{\varphi} \sim \xi/r$ и ξ_r следует ограниченность интегралов

$$\int\limits_0^{r_0} |u|^2 rdr, \quad \int\limits_0^{r_0} |v|^2 rdr, \quad \int\limits_0^{r_0} |w|^2 rdr \qquad (16)$$

одной константой, не зависящей от t (если при $t=0$ эти интегралы существовали), что и требовалось доказать. Линейный рост вихря устанавливается так же, как и в [2]. Он вытекает из того, что хотя величины вида $f(r)e^{-ikWt}$ ограничены, но их производные по r растут линейно по t.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. «Прикладная математика и механика» 36, № 2, 1972.
2. Богдатьева Н. Н., Дикий Л. А. «Прикладная математика и механика», 37, № 3, 1973.
3. Graebel W. P. «J. fl. Mech.», 43, No. 2, 279—290, 1970.

Поступила в редакцию
30.1 1974 г.

Кафедра
физики атмосферы