Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1975

УДК 621.372

В. Н. ПАРЫГИН, Х. ГАССАБ

К ТЕОРИИ ГЕНЕРАТОРА С ОПТИЧЕСКОЙ ЛИНИЕЙ ЗАДЕРЖКИ

Проводится экспериментальное исследование генератора с оптической линией задержки в цепи обратной связи. Изучены амплитудные и частотные характеристики генератора при различной длине оптической линии задержки. Показана возможность использования такого генератора для измерения расстояний.

Исследованию генератора с оптической линией задержки в цепи обратной связи посвящены единичные работы; например [1]. Между тем такой генератор, принципиальная схема которого приведена на рис. 1, весьма интересен как устройство, частота которого зависит от длины оптического пути и групповой скорости света. Генератор может быть использован для измерения расстояний, скорости движения прозрачных сред и для других целей.

При теоретическом анализе генератора с оптической линией задержки нужно прежде всего учесть особенности этого вида задержки по сравнению с обычными линиями задержки, использовавшимися другими авторами [2—10]. Прежде всего, сигнал в оптической линии задержки является чрезвычайно узкополосным, так как частота модуляции на 9—10 порядков ниже частоты несущего колебания. Поэтому оптическую линию задержки можно считать идеальной линией, полностью лишенной дисперсии. Вторая особенность оптической линии состоит в том, что связанные с ней элементы радиоцепи (модулятор света и фотоприемник) являются идеальными однонаправленными элементами. Конечно, в любой реальной системе, кроме оптической задержки $\tau_{опт}$, имеется задержка $\tau_{эл}$ в элементах радиоцепи, обладающая дисперсными свойствами. Однако если $\tau_{опт} \gg \tau_{эл}$, то дисперсией в системе можно пренебречь. Поэтому представляет значительный интерес рассмотрение теории генератора с идеальной линией задержки в цепи обратной связи.

§ 1. Уравнения для амплитуд и фаз стационарного режима

Будем считать, что единственным нелинейным элементом схемы является модулятор света, модуляционная характеристика которого описывается соотношением [11]

$$I(t) = I_0 \sin^2 \frac{\pi}{2} \frac{U(t)}{U_{\lambda/2}}, \tag{1}$$

где $I(t)$ — интенсивность света на выходе из модулятора; I_0 — интенсивность падающего света; $U(t)$ — напряжение, приложенное к модулятору; $U_{\lambda/2}$ — полуволновое напряжение.

Характером нелинейности можно управлять путем подачи на модулятор постоянного смещения от внешнего источника. Интересной особенностью является возможность перехода от синфазных колебаний ($I(t)$ и $U(t)$) на одном из склонов модуляционной характеристики к антифазным колебаниям на другом склоне. Таким образом, можно осуществить сдвиг по фазе на π в системе, не меняя длины оптического пути.

Линия оптической задержки осуществляет идеальный сдвиг во времени, не зависящий от частоты:

$$\tau(\omega) = L/c, \tag{2}$$

где L — длина оптической линии, а c — скорость света. Что же касается коэффициента усиления усилителя, то он, вообще говоря, может быть сделан различным на разных частотах.

Предположение об отсутствии дисперсии позволяет считать, что в системе при достаточном коэффициенте усиления возбудятся периодические колебания, которые могут быть представлены рядом Фурье с неизвестными амплитудами и фазами:

$$U(t) = U_0 + \sum_k \sin a_k (k\omega t + \varphi_k). \tag{3}$$

Наличие в системе кратных частот приводит к сильному взаимодействию колебаний друг с другом.

Основная частота колебаний ω, амплитуды a_k и фазы φ_k в стационарном режиме могут быть найдены из условия баланса фаз и амплитуд. Подставляя (3) в (1) и вводя безразмерные амплитуды $Z_k = \pi a_k / U_{\lambda/2}$, получим следующее выражение для интенсивности света на выходе из модулятора:

$$I(t) = \frac{I_0}{2} - \frac{I_0}{2} \left\{ \sum_{n_1} J_{n_1}(Z_1) \sum_{n_2} J_{n_2}(Z_2) \ldots \cos[a_0 + (n_1 + 2n_2 + \ldots)\omega t + \right.$$

$$\left. + n_1\varphi_1 + n_2\varphi_2 + \ldots] \right\} = \frac{I_0}{2} + \sum_m I_m \sin(m\omega t + \psi_m). \tag{4}$$

Распространяясь по оптической линии, световой сигнал приобретает задержку во времени τ, а затем преобразуется в фотоприемнике и усиливается в усилителе в $\beta_{m\omega}$ раз. Получающееся на выходе усилителя напряжение $u'(t-\tau)$ имеет, таким образом, вид

$$U'(t-\tau) = U_0 + \sum_m \beta_{m\omega} I_m \sin[m\omega(t-\tau) + \psi_m]. \tag{5}$$

Очевидно, в стационарном режиме колебаний генератора выходное напряжение усилителя (5) должно совпадать с напряжением на модуляторе света (3). Отсюда получаем уравнения баланса амплитуд и фаз:

$$Z_m = K_m \frac{I_m}{I_0}, \tag{6}$$

$$\varphi_m = \psi_m - m\omega\tau, \tag{7}$$

где

$$K_m = \frac{\pi\beta_{m\omega} I_0}{U_{\lambda/2}} \tag{8}$$

обобщенный коэффициент усиления системы на частоте $m\omega$. Уравнения баланса амплитуд (6) и фаз (7) позволяют в принципе определить

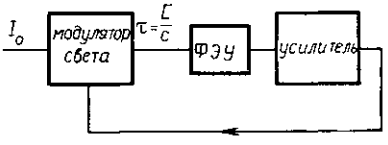

Рис. 1. Принципиальная схема генератора

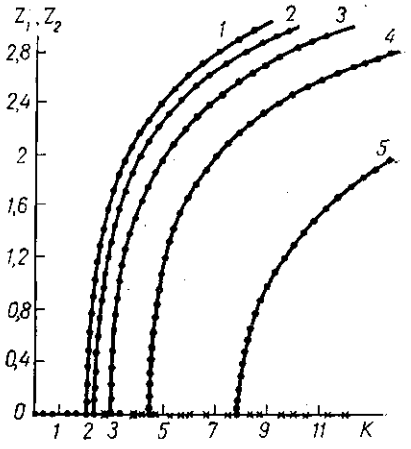

Рис. 2. Зависимость амплитуды от коэффициента усиления в одночастотном режиме при различных смещениях:

$1 - \frac{U_{\lambda/2}}{2}$, $2 - \frac{U_{\lambda/2}}{3}$, $3 - \frac{U_{\lambda/2}}{4}$, $4 - \frac{U_{\lambda/2}}{6}$ и $5 - \frac{U_{\lambda/2}}{12}$

амплитуды и фазы всех гармонических компонентов напряжения на модуляторе. Фактически это можно сделать лишь при определенных упрощающих предположениях вследствие сложности соотношения (4).

Рассмотрим далее несколько простейших случаев, в которых задачу удается решить до конца.

§ 2. Одночастотный генератор

Предположим, что коэффициент усиления K_m равен нулю (или достаточно мал) для всех значений m, кроме одного (например, $m=1$). В этом случае, хотя свет на выходе из модулятора и содержит гармоники частоты ω, из всех уравнений баланса амплитуд и фаз остаются лишь два:

$$Z_1 = K_1 |\sin a_0| J_1(Z_1), \tag{9}$$

$$\omega\tau = 2n\pi \quad \text{при } \sin a_0 > 0 \text{ и } \omega\tau = (2n+1)\pi \quad \text{при } \sin a_0 < 0. \tag{10}$$

Из соотношений (10) видно, что при работе на возрастающем склоне модуляционной характеристики генерация возникает на одной из частот,

кратных $1/\tau$. При работе на спадающем склоне могут генерироваться частоты $1/2\tau$, $3/2\tau$ и т. д. Какая из этих частот будет возбуждена в системе, зависит от частотной характеристики усилителя.

Амплитуда установившегося колебания в случае одночастотной генерации определяется уравнением (9). Поскольку при малых Z_1 $J(Z_1)=Z_1/2$, то условие возникновения одночастотной генерации имеет вид

$$K_1|\sin a_0|>2. \tag{11}$$

При $U_0=0$ или $U_0=n\pi U_{\lambda/2}$, т. е. при работе на квадратичном участке модуляционной характеристики одночастотная генерация вообще невозможна. Наиболее легко происходит возбуждение колебаний при $U_0=\frac{1}{2}U_{\lambda/2}$, т. е. на середине линейного участка характеристики. На рис. 2 приведены результаты расчета стационарной амплитуды при различных значениях U_0 и K_1. Условие устойчивости этих колебаний совпадает с условием (11), т. е. если в системе возможно одночастотное колебание, то оно устойчиво.

§ 3. Генерация двух кратных частот ω и 2ω

Рассмотрим случай, когда коэффициент усиления усилителя имеет такую частотную зависимость, что возможно одновременное возбужде-

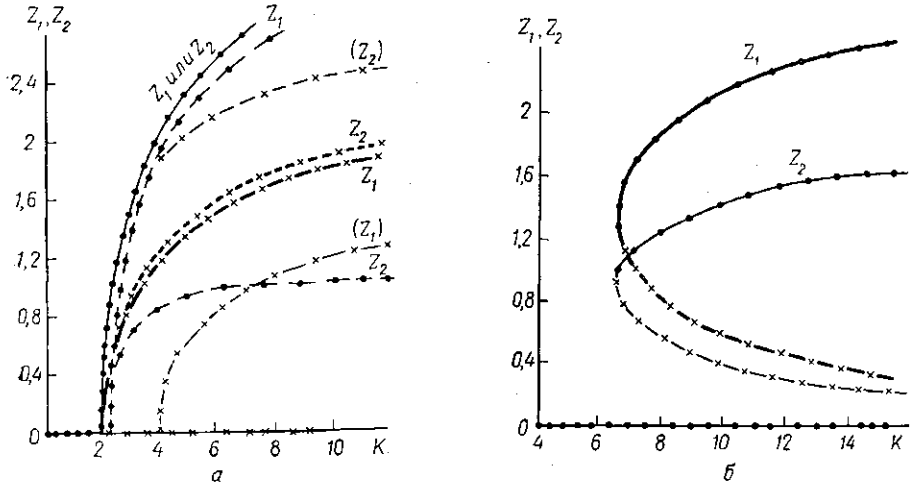

Рис. 3. Зависимость амплитуд в двухчастотных режимах от K. *а* — $U_0=\frac{1}{2}U_{\lambda/2}$ — сплошные кривые, $U_0=\frac{1}{3}U_{\lambda/2}$ — пунктирные; *б* — $U_0=0$. Точки на кривых — устойчивые ветви, кресты — неустойчивые ветви

ние колебаний на частотах ω и 2ω, причем коэффициенты усиления для обоих частот одинаковы и равны K.

Мгновенное значение интенсивности света на выходе из модулятора имеет в этом случае вид

$$I(t)=\frac{I_0}{2}-\frac{I_0}{2}\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty}J_{n_1}(Z_1)\sum_{n_2=-\infty}^{+\infty}J_{n_2}(Z_2)\cos[a_0+(n_1+2n_2)\omega t+n_2\varphi], \tag{12}$$

где φ — разность фаз при $t=0$ между колебаниями с частотой 2ω и частотой ω.

Так как усилитель пропускает только частоты 1ω и 2ω, то из всех возможных значений n_1 и n_2 в (12) представляют интерес только те, для которых $n_1+2n_2=\pm 1$ и $n_1+2n_2=\pm 2$. Однако даже таких значений n_1 и n_2 имеется бесконечно много. При расчете их число можно ограничить из физических соображений. При не слишком больших коэффициентах усиления естественно считать, что максимальная амплитуда колебаний не превышает $U_{\lambda/2}$. В этом случае все Z_k меньше π. Из теории функций Бесселя известно, что величина этих функций мала, когда порядок функции превышает ее аргумент. Поэтому в (12) можно отбросить все те функции, для которых $|n_1|>5$ или $|n_2|>5$.

Проводя в этом случае соответствующие выкладки, получим из фазовых уравнений $\varphi=\pi/2$. Амплитудные уравнения с учетом этого условия принимают вид

$$\begin{aligned} Z_1 &= K\{[J_1(Z_1)\,J_0(Z_2)+J_3(Z_1)\,J_2(Z_2)-J_5(Z_1)\,J_1(Z_2)]\sin a_0 + \\ &\quad + [J_1(Z_1)\,J_2(Z_2)-J_3(Z_1)\,J_1(Z_2)-J_5(Z_1)\,J_3(Z_2)]\cos a_0\}, \\ Z_2 &= K\{[J_0(Z_1)\,J_1(Z_2)+J_4(Z_1)\,J_1(Z_2)-J_4(Z_1)\,J_3(Z_2)]\sin a_0 + \\ &\quad + [J_2(Z_1)\,J_0(Z_2)-J_2(Z_1)\,J_2(Z_2)]\cos a_0\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Система уравнений (13) достаточно сложна, поэтому ее решение было получено с помощью ЭВМ БЭСМ-6. В результате расчета для каждого U_0 получены зависимости Z_1 и Z_2 от K. Следует отметить, что одному значению K обычно соответствует несколько значений Z_1 и Z_2, удовлетворяющих уравнениям (13).

Все полученные решения можно разбить на такие четыре типа.

$Z_1=0$, $Z_2=0$ — система находится в положении равновесия.

$Z_1\neq 0$, $Z_2=0$ — в системе имеется колебание с частотой ω. Такое решение может существовать только в том случае, когда $\cos a_0=0$.

$Z_1=0$, $Z_2\neq 0$ — в системе происходит колебание с частотой 2ω.

$Z_1\neq 0$, $Z_2\neq 0$ — колебания имеют бигармонический характер.

Результаты анализа конкретных режимов работы исследуемого генератора при различных положениях рабочей точки на модуляционной характеристике показаны на рис. 3.

В случае $U_0=\frac{1}{2}U_{\lambda/2}$, система самовозбуждается при $K>2$. При этом появляются решения, относящиеся ко всем четырем рассмотренным типам.

Исследование устойчивости различных решений при заданном K и U_0 удобно производить с использованием плоскости Z_1, Z_2. Общая картина интегральных кривых на этой плоскости позволяет наглядно представить себе устойчивые и неустойчивые режимы колебаний. Конечно, полное построение картины интегральных кривых на плоскости Z_1 и Z_2 чрезвычайно сложно, однако для исследования устойчивости достаточно рассмотреть качественную картину поведения интегральных кривых. Такую картину можно построить с помощью метода изоклин [12]. Две такие изоклины на плоскости Z_1, Z_2 можно указать сразу. Действительно, первое из уравнений (13) определяет на этой плоскости кривую стационарного Z_1. Это изоклина вертикальных касательных к интегральным кривым. Соответственно второе уравнение (13) определяет изоклину горизонтальных касательных на плоскости Z_1 и Z_2. На

рис. 4 изображена плоскость Z_1, Z_2 и обе изоклины для случая $U=\frac{1}{2}U_{\lambda/2}$ и $K=3{,}5$. В данном случае устойчивыми являются колебания с амплитудами $Z_1=2$, $Z_2=0$, $Z_1=0$ и $Z_2=2$. Положение равновесия $Z_1=Z_2=0$ и бигармонический режим являются неустойчивыми. Легко усмотреть также области начальных условий, из которых колебания переходят в тот или иной стационарный режим.

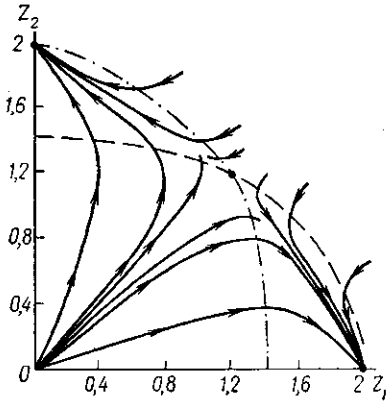

Рис. 4. Поведение интегральных кривых на плоскости Z_1 и Z_2

Таким образом, при работе на середине линейного участка модуляционной характеристики генератор при превышении условия самовозбуждения генерирует гармонические колебания с частотой ω или 2ω в зависимости от начальных условий возбуждения колебаний. При изменении положения рабочей точки на модуляционной характеристике характер получаемых решений изменяется. Например, при $U_0=\frac{1}{3}U_{\lambda/2}$ и $K=5$ имеется устойчивый бигармонический режим, для которого $Z_1>Z_2$. Второй бигармонический режим ($Z_2>Z_1$) является неустойчивым.

При $U=\frac{1}{6}U_{\lambda/2}$ характер режимов в системе вновь изменяется в области коэффициентов усиления $3<K<3{,}5$ существуют два бигармонических режима и устойчивое положение равновесия. Это область жесткого возбуждения колебаний, в которой колебания могут возникнуть лишь после достаточно сильного начального толчка. При работе на квадратичном участке модуляционной характеристики ($U_0=0$) положение равновесия всегда устойчиво. Однако при $K>6{,}5$ возможно жесткое возбуждение бигармонических колебаний, у которых $Z_1>Z_2$.

Таким образом, при работе на линейном участке модуляционной характеристики в системе могут возбуждаться два различных типа колебаний в зависимости от начальных условий. Но по мере перехода в нелинейную область, возбуждение одного из этих типов затрудняется, а затем и становится невозможным.

§ 4. Другие типы двухчастотной генерации

Исследования, проведенные в предыдущем параграфе, показали, что на середине линейного участка модуляционной характеристики $\left(\text{при } U_0=\frac{1}{2}U_{\lambda/2}\right)$ не происходит взаимодействия между колебаниями частот ω и 2ω. Это связано с отсутствием четных членов характеристики. При этом наблюдается сильная связь между колебаниями частот ω и 3ω. Поэтому был рассмотрен вопрос о совместной генерации этих частот. В результате анализа было показано, что в этом случае возможны два устойчивых вида колебания. В первом случае при $Z_1=0$, а $Z_3\neq0$ происходит колебание с частотой 3ω. Второе устойчивое колебание имеет бигармонический характер, причем $Z_1>Z_3$. Фактиче-

ски это колебание с частотой ω, имеющее небольшую третью гармонику.

Кроме того, была решена задача о генерации колебаний, когда в полосу усиления попадают две некратные частоты. Такие условия могут возникнуть при использовании усилителя с полосовым фильтром, в полосу пропускания которого входят две частоты с соседними значениями n, ни одно из которых не равно единице.

Уравнения, определяющие стационарные амплитуды колебаний, принимают в этом случае вид

$$Z_1 = K|\sin a_0|\, J_1(Z_1)\, J_0(Z_2),$$
$$Z_2 = K|\sin a_0|\, J_0(Z_1)\, J_0(Z_2). \qquad (14)$$

Исследование устойчивости возможных колебаний показало, что бигармонический режим с некратными частотами всегда неустойчив. В системе могут возбуждаться только гармонические колебания с частотой ω_1 или ω_2. Амплитудные характеристики в этом случае совпадают с характеристиками одночастотного режима (см. рис. 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Fujioka T., Uchiyama T., Kobayachi. IEEE, QE, 1969.
2. Бовшеверов В. Н. ЖТФ, 6, 1480, 1936.
3. Азьян Ю. М., Мигулин В. В. «Радиотехника и электроника», 1, 418, 1956.
4. Азьян Ю. М. «Радиотехника и электроника», 8, 1666, 1963.
5. Азьян Ю. М., Снигирев О. В., Мкртумов А. С. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 13, № 1, 99, 1972.
6. Горелик Г. С. ЖТФ, 5, вып. 9, 1936.
7. Неймарк Ю. И. «Радиотехника и электроника», 3, 1348, 1958.
8. Gunnigham W. J. «J. Frak. Inst.», 5, 261, 1961.
9. Met V. «Proced IRE», 45, 1957.
10. Рубаник В. П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М., 1969.
11. Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Методы модуляции и сканирования света. М., 1970.
12. Скибарко А. П., Стрелков С. П. ЖЭТФ, № 1, вып. 1, 1934.

Поступила в редакцию
22.3 1974 г.

Кафедра
физики колебаний