

Б. К. НОВИКОВ

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

В работе теоретически рассматривается вопрос о распространении волны конечной амплитуды в средах, описывающихся нелинейным уравнением релаксации. Показано, что учет нелинейных «релаксационных» членов в уравнениях гидродинамики приводит к увеличению эффективного значения нелинейности в области $\omega t \sim 1$.

Нелинейная теория распространения волн конечной амплитуды в релаксирующих средах изучалась ранее на основе нелинейных уравнений гидродинамики и линейного уравнения релаксации, предложенного Мандельштамом — Леонтовичем [1]:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\xi - \xi_0}{\tau}, \quad (1)$$

где ξ — релаксирующий параметр, ξ_0 — его мгновенное равновесное значение, τ — время релаксации. Уравнение (1) легко получается из феноменологической теории неравновесных процессов в предположении, что $(\xi - \xi_0)/\xi_0 \ll 1$, т. е. отклонение релаксирующего параметра от состояния равновесия мало и величинами $\sim (\xi - \xi_0)^2$ можно пренебрегать. При распространении интенсивных волн нелинейность среды уже оказывает заметное влияние на поведение волны, и поэтому при расчете необходимо учитывать нелинейные члены. Если, следуя теории неравновесных процессов, проделать вывод уравнения релаксации с точностью до членов второго порядка малости, то получим нелинейное уравнение релаксации, которое запишется в виде

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\xi - \xi_0}{\tau} + A(\xi - \xi_0)^2. \quad (2)$$

Величины τ , A определяются свойствами среды.

Следует заметить, что в принципе у системы с уравнением релаксации (2) могут быть два равновесных значения релаксирующего параметра $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_0 - 1/A\tau$. Но если учесть, что к первому равновесному значению $\xi = \xi_0$ система стремится при $t \rightarrow \infty$, а ко второму значению $\xi = \xi_0 - 1/A\tau$ при $t \rightarrow -\infty$, что физически абсурдно, то неоднозначность исчезает.

В дальнейшем будем считать, что отклонения других параметров системы от состояния равновесия тоже являются малыми. Также счи-

таем, что члены, характеризующие изменение энтропии системы, являются величинами третьего порядка малости и поэтому при решении задачи во втором приближении их можно не учитывать. В этом случае уравнение состояния примет вид

$$P' = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right) \rho' + \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} \right) \xi' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right) \rho'^2 + \\ + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho \partial \xi} \right) \rho' \xi' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} \right) \xi'^2 \quad (3)$$

(здесь и в дальнейшем частные производные вычисляются при равновесных значениях параметров ρ_0 и ξ_0), где $P' = P - P_0$, $\rho' = \rho - \rho_0$ и $\xi' = \xi - \xi_0$, P — давление, ρ — плотность, а P_0 и ρ_0 соответственно — их равновесные значения. Используя тождество

$$\frac{dP}{dt} = \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} \right)_{\rho} \frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\xi} \frac{d\rho}{dt},$$

нелинейное уравнение релаксации (2), а также уравнение состояния (3), которое отличается от традиционного тем, что в нем удержаны нелинейные члены с релаксацией, можно найти связь между давлением P' и плотностью ρ_1 с точностью до членов второго порядка малости:

$$P' = c_0^2 \rho' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right) \rho'^2 + mc_0^2 \int_{-\infty}^t \frac{\partial \rho'}{\partial t'} e^{-\frac{t-t'}{\tau}} dt' + \\ + \frac{\Gamma_1 c_0^2}{\tau} \int_{-\infty}^t dt' e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \left[\int_{-\infty}^{t'} \frac{\partial \rho'}{\partial t''} e^{-\frac{t'-t''}{\tau}} dt'' \right]^2 + \\ + \frac{\Gamma_2 c_0^2}{\tau} \int_{-\infty}^t dt' e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \rho' \int_{-\infty}^{t'} \frac{\partial \rho'}{\partial t''} e^{-\frac{t'-t''}{\tau}} dt''. \quad (4)$$

Уравнение (4) по сравнению с (2) из [4] содержит два дополнительных нелинейных члена с коэффициентами Γ_1 и Γ_2 . Последние выражаются через феноменологические коэффициенты в виде

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} mc_0^2 \left(A\tau + \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} \right) / \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} \right), \quad \Gamma_2 = \frac{m}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \rho \partial \xi} / \frac{\partial P}{\partial \xi},$$

c_0 — скорость звука при ($\omega\tau \ll 1$), c_∞ — скорость звука при ($\omega\tau \gg 1$), параметр $m = \frac{c_\infty^2 - c_0^2}{c_0^2}$ — характеризует дисперсию среды.

Далее необходимо решить уравнение (4) совместно с уравнениями непрерывности и Эйлера. Сложный интегродифференциальный вид выражения (4) не позволяет найти точного аналитического решения. Поэтому дальнейшее решение системы будет проводиться на основе метода последовательных по числу Маха приближений. Уравнение первого приближения для плоской волны запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} + m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^t \frac{\partial \rho_1}{\partial t'} e^{-\frac{t-t'}{\tau}} dt' = 0. \quad (5)$$

Для граничного условия $\rho_1 = \rho_0 e^{i\omega t}$ при $x = 0$ решение уравнения (5) запишется в виде

$$\rho_1 = \rho_0 \exp i[\omega t - K(\omega) x] = \rho_0 \exp [-K_2 x + i(\omega t - K_1 x)]. \quad (6)$$

Коэффициент K_2 , определяющий затухание волны, является мнимой частью K :

$$K(\omega) = \sqrt{\frac{1 - i\omega\tau}{c_0^2 - ic_\infty^2 \omega\tau}} = K_1(\omega) - iK_2(\omega). \quad (7)$$

Подставляем выражение (6) в члены второго порядка малости исходной системы уравнений. При учете граничных условий $\rho_2 = 0$ $x = 0$, решая ее для амплитуды второй гармоники, получим выражение

$$\rho_2 = \frac{F\rho_0^2}{K^2(2\omega) - 4K^2(\omega)} [e^{-iK(2\omega)x} - e^{-2iK(\omega)x}] e^{2i\omega t}, \quad (8)$$

где

$$F = \left[\frac{(\gamma + 1)}{2c_0\rho_0} + \frac{\omega^2\tau^2(1 - 5\omega^2\tau^2)}{(1 + 4\omega^2\tau^2)(1 + \omega^2\tau^2)^2} \Gamma_1 + \frac{3\omega^2\tau^2}{(1 + \omega^2\tau^2)(1 + 4\omega^2\tau^2)} \Gamma_2 \right] + \\ + i \left[\frac{3\omega^2\tau^2(2 - \omega^2\tau^2)}{(1 + \omega^2\tau^2)^2(1 + 4\omega^2\tau^2)} \Gamma_1 + \frac{\omega\tau(1 - 2\omega^2\tau^2)}{(1 + \omega^2\tau^2)(1 + 4\omega^2\tau^2)} \Gamma_2 \right], \quad (9)$$

γ — показатель адиабаты в уравнении состояния.

Решению (8) можно придать более удобный для анализа вид:

$$\rho_2 = 2\rho_0^2 \left| \frac{F}{K^2(2\omega) - 4K^2(\omega)} \right| \sqrt{\operatorname{ch}^2 \Delta K_1 x - \cos^2 \Delta K_2 x} \times \\ \times \exp \left\{ - \left[\frac{1}{2} K_2(2\omega) + K_2(\omega) \right] x + \right. \\ \left. + i \left[2\omega t - \frac{1}{2} K_1(2\omega) - K_1(\omega) x + \varphi \right] \right\}, \quad (10)$$

где

$$\Delta K_1 = K_1(2\omega) - K_1(\omega), \quad \Delta K_2 = K_2(2\omega) - K_2(\omega),$$

$$\varphi = \arctg \frac{\operatorname{Re} \left[\frac{F}{K^2(2\omega) - 4K^2(\omega)} \right]}{\operatorname{Im} \left[\frac{F}{K^2(2\omega) - 4K^2(\omega)} \right]} + \arctg \frac{\operatorname{th} \Delta K_1 x}{\operatorname{tg} \Delta K_2 x}.$$

Анализ решения (10) показывает, что амплитуда второй гармоники сигнала возрастает до некоторого максимального значения, а затем монотонно убывает до нулевого. Это объясняется не только затуханием первой и второй гармоник, но и различием их фазовых скоростей, приводящим к резкому ослаблению процесса генерации.

Итак, положение максимума, величина затухания и фазовая скорость второй гармоники не зависят от коэффициентов при нелинейных релаксирующих членах. Существенное влияние эти члены оказывают лишь на амплитуду второй гармоники. Это означает, что нелинейные свойства среды определяются не только коэффициентом $(\gamma + 1)/2c_0\rho_0$, но и членами, зависящими от $\omega\tau$ с коэффициентами Γ_1 и Γ_2 . Следует заметить, что вклад этих членов существен только при $\omega\tau \sim 1$, а при значениях $\omega\tau \rightarrow 0$ и $\omega\tau \rightarrow \infty$ они быстро убывают до нулевого значения. К сожалению, феноменологический подход к решению задачи не дает

возможности найти численные значения коэффициентов Γ_1 и Γ_2 для различных сред и поэтому трудно теоретически вычислить вклад этих членов в общий коэффициент нелинейности среды.

Автор благодарит О. В. Руденко и Л. К. Зарембо за ценные советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лившиц Е. И. Механика сплошных сред. М., 1954.
2. Мэзон У. Физическая акустика, т. 2. М., 1968.
3. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М., 1966.
4. Руденко О. В., Солуян С. И. «Акустический журнал», 16, 421, 1972.
5. Кларк Дж., Макчесни М. Динамика реальных газов. М., 1967.

Поступила в редакцию
22.4 1974 г.

Кафедра
физики волновых процессов