

Г. А. БЕНДРИКОВ, В. В. ВОЛКОВ

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СО МНОГИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ МЕТОДОМ ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ

Рассмотрены общие свойства корневого годографа трансцендентного характеристического уравнения вида

$$\Phi_1(\rho) e^{\rho\tau_1} + \dots + \Phi_k(\rho) e^{\rho\tau_k} + \Lambda(\rho) + \\ + \rho [\Psi_1(\rho) e^{\rho\tau_1} + \dots + \Psi_k(\rho) e^{\rho\tau_k} + \Theta(\rho)] = 0,$$

где  $\rho$  — свободный параметр. Пользуясь этими свойствами, можно путем изменения расположения начальных и предельных точек и асимптотики траекторий корней существенно влиять на динамику сложных систем с запаздыванием. Получено аналитическое уравнение траекторий корней, позволяющее эффективно использовать ЦВМ для анализа и синтеза таких систем.

Несмотря на достигнутые в последние годы успехи в теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, инженерные методы расчета до сих пор ограничиваются сравнительно простыми системами с запаздыванием. По существу только метод  $D$ -разбиения является относительно универсальным как в смысле структурной сложности системы, так и в отношении количества элементов запаздывания. Между тем метод траекторий корней также не содержит в себе каких-либо принципиальных ограничений в этом плане. В то же время, на наш взгляд, он имеет преимущества при синтезе систем, так как позволяет не только исследовать устойчивость, получить критические значения параметров, при которых система возбуждается, и частоты, на которых это происходит, но и выяснить, как меняются свойства системы при изменении ее параметров, внесении в систему корректирующих блоков или связей. Его наглядность и информативность все больше привлекают внимание исследователей. Не случайно в нескольких последних работах, связанных с более или менее сложными системами с запаздыванием, применяется именно этот метод [1, 2].

Однако теория метода траекторий корней детально разработана [3] лишь для систем, которые могут быть приведены к одноконтурным системам с одним запаздыванием при свободном параметре — коэффициенте усиления. В работе [4] обосновано применение метода как для одноконтурных, так и для многоконтурных систем с одним блоком запаздывания при любом выборе линейного свободного параметра. Ниже показаны возможности метода траекторий корней при исследо-

вании систем, содержащих произвольное число элементов с запаздыванием, которые нельзя привести к эквивалентному блоку, запаздывание в котором равно сумме всех запаздываний.

Собственные движения в таких системах в общем случае описываются стационарным дифференциальным линейным уравнением с отклоняющимся аргументом, имеющим вид

$$\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^n a_{ij} x^{(j)}(t - \tau_i) = 0.$$

Решение этого уравнения ищется [5], как и для обычных дифференциальных уравнений, в виде  $x = e^{pt}$ . Полученное характеристическое уравнение умножим на  $e^{p\tau_{\max}}$  и запишем его в виде

$$\Phi_1^0(p) e^{p\tau_1} + \dots + \Phi_k^0(p) e^{p\tau_k} + \Lambda^0(p) = 0, \quad (1)$$

где  $\Phi_1^0, \dots, \Phi_k^0, \Lambda^0$  — полиномы от  $p = \delta + j\omega$ ,  $\tau_1, \dots, \tau_k$  — времена запаздывания. Для определенности в дальнейшем будем считать, что выполняется условие  $\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_k > \tau_0 = 0$ . Выбрав свободный параметр  $\rho$ , в зависимости от которого нужно исследовать перемещение корней характеристического уравнения по комплексной плоскости  $p$ , перепишем это уравнение в виде

$$\Phi_1(p) e^{p\tau_1} + \dots + \Phi_k(p) e^{p\tau_k} + \Lambda(p) + \rho [\Psi_1(p) e^{p\tau_1} + \dots + \Psi_k(p) e^{p\tau_k} + \Theta(p)] = 0. \quad (2)$$

Заметим, что  $\rho$  может быть любым параметром, линейно входящим в уравнение, например коэффициентом усиления. Как показал Л. С. Понтрягин [6], решение дифференциального уравнения может быть устойчивым только при наличии в соответствующем трансцендентном характеристическом уравнении главного члена. Напомним, что главным членом уравнения (1) будет  $\Phi_1^0(p) e^{p\tau_1}$  в том случае, если степень полинома  $\Phi_1^0$  больше степеней остальных полиномов, а  $\tau_1$  больше всех остальных  $\tau$ . Таким образом, для практических целей не имеет смысла рассматривать уравнения, не содержащие главного члена, хотя для построения траекторий корней это не является ограничением.

Выясним основные свойства траекторий корней уравнения (2). Как известно [7], ряд этих свойств позволяет многое сказать о поведении системы, даже не прибегая к построению корневого годографа. Наиболее важными из них являются расположение начальных и предельных точек и асимптотика траекторий корней.

Корневой портрет системы полностью определяется относительным расположением начальных ( $\rho = 0$ ) и предельных ( $\rho \rightarrow \pm\infty$ ) точек. Уравнения для их определения получаются из (2) при соответствующих значениях свободного параметра. Ясно, что эти уравнения сами имеют вид (1), но обычно меньшей сложности (понижение порядка полиномов, сокращение числа членов). Каждое из этих уравнений можно исследовать в зависимости от своих, отличных от  $\rho$  параметров, являющихся для исходного уравнения (2) параметрами семейства. Возможность перемещения начальных и предельных точек по комплексной плоскости  $p$  путем варьирования параметров семейства позволяет существенно влиять на динамику системы и изменять ее в желаемом направлении.

Заметим, однако, что не всякий параметр семейства оказывает независимое влияние на начальные и предельные точки, так как он может входить в оба эти уравнения. Часть начальных и предельных точек определяется сосредоточенными параметрами блоков, входящих в систему, т. е. полиномами  $\Phi_i$ ,  $\Lambda$ ,  $\Psi_i$ ,  $\Theta$ . Кроме того, существует бесконечное количество начальных и предельных точек, связанных с наличием запаздываний, т. е. с экспонентами  $e^{p\tau_i}$ . Эти точки, вообще говоря, могут находиться в любом месте комплексной плоскости  $p$ , в том числе в конечной по  $\delta$  области, а не только в  $+\infty$  и  $-\infty$ , как в случае одноконтурных систем с одним запаздыванием.

Можно показать, что вид траекторий корней связан только с относительным расположением начальных и предельных точек и не зависит от положения мнимой оси. В самом деле, любой член уравнения (2) можно записать [7] в виде произведения  $\sigma \prod_{\alpha} (p - p_{\alpha}) e^{p\tau}$ , где  $p_{\alpha}$  — корни соответствующего полинома,  $\sigma$  — параметр семейства. Очевидно, разность  $p - p_{\alpha}$  не зависит от положения мнимой оси и является расстоянием от места расположения корня до некоторой точки плоскости  $p$ . Член  $e^{-p\tau}$ , появляющийся при сдвиге мнимой оси на  $a$ , всегда действителен, и его можно учесть в величине соответствующего параметра семейства. Значения параметров семейства при новом положении мнимой оси и сохранении относительного расположения начальных и предельных точек в этом случае, конечно, изменяются. Таким образом, конфигурация траекторий корней, описываемых уравнением (2), не изменяется при замене переменной вида  $\tilde{p} = p + a$ , где  $a$  — действительно. Следовательно, каждое определенное расположение начальных и предельных точек и соответствующий корневой портрет определяют собой целый континуум различных систем, отвечающих различным положениям мнимой оси.

Так же как и в системах без запаздывания, можно показать, что любую группу корней уравнения (2) при фиксированном  $\rho = \rho_0$  можно принять за начальные точки. Предельные точки при этом не меняются. Это свойство позволяет в ряде случаев упростить исследование.

Как известно [7], построение корневых траекторий можно осуществлять геометрическим методом — по основному фазовому уравнению или аналитическим — по аналитическому уравнению траекторий корней. Получение основного фазового уравнения в нашем случае, хотя в принципе и возможно, связано с многократными громоздкими тригонометрическими преобразованиями. Сложность конечной формулы быстро растет с увеличением числа членов уравнения (2). Кроме того, простой геометрический смысл, присущий основным фазовым уравнениям в более простых случаях [3, 7], теряется уже даже для уравнения с одним запаздыванием общего вида [4]. Наконец, в целях программирования при вычислении траекторий корней на ЦВМ удобнее использовать аналитический метод. Поэтому в дальнейшем будем пользоваться именно им.

Как всегда, аналитическое уравнение траекторий корней можно получить, разделяя в (2) действительную и мнимую части, приравнявая их нулю и исключая свободный параметр. Уравнение имеет вид

$$F(\delta, \omega) = (\Phi_{1r} \Psi_{1j} - \Phi_{1j} \Psi_{1r}) e^{2\delta\tau_1} + \dots + (\Phi_{kr} \Psi_{kj} - \Phi_{kj} \Psi_{kr}) e^{2\delta\tau_k} + \\ + [(\Phi_{1r} \Psi_{2j} - \Phi_{1j} \Psi_{2r} + \Phi_{2r} \Psi_{1j} - \Phi_{2j} \Psi_{1r}) \cos \omega (\tau_1 - \tau_2) - \\ - (\Phi_{1r} \Psi_{2r} + \Phi_{1j} \Psi_{2j} - \Phi_{2r} \Psi_{1r} - \Phi_{2j} \Psi_{1j}) \sin \omega (\tau_1 - \tau_2)] e^{\delta(\tau_1 + \tau_2)} + \dots$$

$$\begin{aligned}
& \dots + [(\Phi_{k-1,r} \Psi_{kj} - \Phi_{k-1,i} \Psi_{kr} + \Phi_{kr} \Psi_{k-1,j} - \Phi_{kj} \Psi_{k-1,r}) \cos \omega (\tau_{k-1} - \tau_k) - \\
& \quad - (\Phi_{k-1,r} \Psi_{kr} + \Phi_{k-1,i} \Psi_{kj} - \Phi_{kr} \Psi_{k-1,r} - \Phi_{kj} \Psi_{k-1,j}) \times \\
& \quad \times \sin \omega (\tau_{k-1} - \tau_k)] e^{\delta(\tau_{k-1} + \tau_k)} + \\
& \quad + [(\Phi_{1r} \Theta_j - \Phi_{1j} \Theta_r + \Lambda_r \Psi_{1j} - \Lambda_j \Psi_{1r}) \cos \omega \tau_1 - \\
& \quad - (\Phi_{1r} \Theta_r + \Phi_{1j} \Theta_j - \Lambda_r \Psi_{1r} - \Lambda_j \Psi_{1j}) \sin \omega \tau_1] e^{\delta \tau_1} + \dots \\
& \quad \dots + [(\Phi_{kr} \Theta_j - \Phi_{kj} \Theta_r + \Lambda_r \Psi_{kj} - \Lambda_j \Psi_{kr}) \cos \omega \tau_k - \\
& \quad - (\Phi_{kr} \Theta_r + \Phi_{kj} \Theta_j - \Lambda_r \Psi_{kr} - \Lambda_j \Psi_{kj}) \sin \omega \tau_k] e^{\delta \tau_k} + \Lambda_r \Theta_j - \Lambda_j \Theta_r = 0, \quad (3)
\end{aligned}$$

где индексы  $r$  и  $j$  означают действительную и мнимую части соответствующих полиномов. Несмотря на сложность этого уравнения в общем виде, в конкретных случаях оно, как правило, значительно упрощается из-за отсутствия в характеристическом уравнении части полиномов.

После нанесения на комплексной плоскости начальных и предельных точек становятся ясными общие тенденции прохождения траекторий корней, поэтому их точное построение можно проводить лишь в интересующих нас областях. Отметим также, что общий вид уравнения (3) не зависит от количества элементов запаздывания  $k$ . Добавление новых запаздываний ведет к простому увеличению числа членов этого уравнения. Таким образом, принципиальная сложность аналитического уравнения траекторий корней перестает расти начиная с  $k=2$ , т. е. при наличии в системе двух запаздываний. Это обстоятельство существенно облегчает программирование.

Программа, составленная для вычисления траекторий корней по аналитическому уравнению (3) на малой ЦВМ «Мир-1», показала хорошее качество счета при сравнительно небольшой затрате времени. Исходные данные записываются в виде коэффициентов полиномов характеристического уравнения (2) и значений параметров семейства и времен запаздывания, т. е. предварительной ручной обработки информации практически не требуется. Поскольку левая часть аналитического уравнения (3) является функцией двух переменных  $\delta$  и  $\omega$ , то, фиксируя, например,  $\delta$ , можно, двигаясь по прямой параллельной мнимой оси, найти все корни этого уравнения, лежащие в некотором интервале частот. Эти корни являются, конечно, и корнями уравнения (2). Тем самым метод траекторий корней позволяет естественным образом обойти трудности, связанные с бесконечным количеством корней трансцендентного характеристического уравнения. Для каждой найденной точки траектории программа одновременно вычисляет значение свободного параметра. Формулы параметра получаются либо непосредственно из (2) путем вычисления модуля, либо из действительной или мнимой части (2).

Рассмотрим некоторые общие свойства траекторий корней, вытекающие из исходного характеристического уравнения (2) и аналитического уравнения траекторий корней (3). Учитывая, что в мнимую часть каждого полинома  $\omega$  входит как множитель [7], легко видеть, что  $\omega=0$  является решением этого уравнения и, следовательно, действительная ось целиком принадлежит траекториям корней. Выразив свободный параметр  $\rho$  из уравнения (2), получим, что достаточно больших  $\delta$  на правой полуоси  $\rho < 0$ , так как коэффициенты при старших степенях  $\Phi_1(\rho)$  и  $\Psi_1(\rho)$  всегда можно привести к единице. При переходе через каждую начальную или предельную точку по действитель-

ной оси влево  $\rho$  будет менять знак. Таким образом, разбиение действительной оси начальными и предельными точками на участки с  $\rho > 0$  и  $\rho < 0$  делается, как обычно, после чего не представляет труда выделить траектории с определенным знаком свободного параметра и на всей комплексной плоскости.

Если в (3) подставить  $\delta = 0$ , получим уравнение для определения частот, на которых происходит выход корней характеристического уравнения (2) на мнимую ось.

Исключая из (2) и из уравнения, полученного из него дифференцированием по  $\rho$ , свободный параметр, находим уравнение возможных кратных точек. Однако, поскольку это трансцендентное уравнение будет гораздо сложнее, чем (2), решать его непосредственно вряд ли целесообразно. Приблизительное местонахождение кратных точек на действительной оси можно установить, исходя из общих соображений теорий траекторий корней. При некоторых навыках то же можно проделать и для комплексных кратных точек. Правда, в этом случае кратные точки могут существовать только теоретически, так как при небольшом изменении параметров семейства один тип траекторий фактически переходит в другой. Необходимые уточнения в расположении кратных точек делаются в процессе счета траекторий корней.

Общее представление о корневом портрете системы, позволяющее выделить определенные области плоскости  $\rho$ , где необходимо точное построение траекторий, дает знание асимптотики. При наличии нескольких запаздываний появляется ряд новых и необычных свойств. Напомним, что для систем без запаздывания асимптотами траекторий корней являлись прямые, образующие правильную звезду с центром на действительной оси [7]. Для одноконтурных систем с одним запаздыванием асимптотами были горизонтальные прямые, отстоящие друг от друга на расстоянии  $\pi/\tau$  [3], а в общем случае систем, содержащих одно запаздывание, — некоторая комбинация этих асимптотик [4]. Основные виды асимптот траекторий корней уравнения (2) следующие.

При  $\delta \rightarrow -\infty$  и  $\delta \rightarrow \infty$  траектории корней уравнения (2) стремятся к асимптотам уравнений

$$\Lambda(\rho) + \rho\Theta(\rho) = 0, \quad (4)$$

$$\Phi_1(\rho) + \rho\Psi_1(\rho) = 0. \quad (5)$$

Уравнения такого типа описывают системы без запаздывания, и каждому из них соответствует звезда асимптот. В первой звезде нужно взять лучи, уходящие только в левую полуплоскость ( $\delta \rightarrow -\infty$ ), во второй — в правую ( $\delta \rightarrow \infty$ ). Таким образом, уравнение (2) имеет две полувзвезды асимптот, к которым уходит конечное число корней этого трансцендентного уравнения. Бесконечное количество корней его при этом может оставаться в конечной по  $\delta$ -области плоскости  $\rho$ , если все начальные и предельные точки заключены в этой области. Следовательно, при нескольких запаздываниях, как и в общем случае одного запаздывания [4], возможно построение систем, динамика которых сходна с динамикой систем без запаздывания. В частности, может сохраняться устойчивость при неограниченном росте свободного параметра, в том числе коэффициента усиления. На последнюю возможность впервые указал М. В. Мееров [8].

В частных случаях, когда в уравнении (2) отдельные полиномы тождественно равны нулю, асимптотика следующая. Если  $\Lambda(\rho) \equiv 0$  или  $\Theta(\rho) \equiv 0$ , то при  $\delta \rightarrow \infty$  асимптотические свойства определяются уравнением (5). При  $\delta \rightarrow -\infty$ , если  $\Lambda(\rho) \equiv 0$ , асимптоты соответствуют асимптотам уравнения

$$\Phi_k(p) e^{\rho\tau_k} + \rho\Theta(p) = 0, \quad (6)$$

а при  $\Theta(p) \equiv 0$  — уравнения

$$\Lambda(p) + \rho\Psi_k(p) e^{\rho\tau_k} = 0. \quad (7)$$

Поскольку  $\delta \rightarrow -\infty$ , то горизонтальные асимптоты этих уравнений, отстоящие друг от друга на величину  $\frac{\pi}{\tau_k}$ , будут только в левой полуплоскости. Причем, если для уравнения (6) при росте свободного параметра корни двигаются, как обычно, из  $-\infty$  вправо, то для уравнения (7) картина обратная: корни двигаются справа налево, в  $-\infty$ .

В случае  $\Phi_1(p) \equiv 0$  или  $\Psi_1(p) \equiv 0$  при  $\delta \rightarrow -\infty$ , асимптотика определяется уравнением (4). Для  $\delta \rightarrow \infty$  она будет определяться при  $\Phi_1(p) \equiv 0$  уравнением

$$\Phi_2(p) + \rho\Psi_1(p) e^{\rho(\tau_1 - \tau_2)} = 0, \quad (8)$$

а при  $\Psi_1(p) \equiv 0$  — уравнением

$$\Phi_1(p) e^{\rho(\tau_1 - \tau_2)} + \rho\Psi_2(p) = 0. \quad (9)$$

Асимптоты этих уравнений — тоже горизонтальные прямые, но отстоящие друг от друга на большие расстояния —  $\frac{\pi}{\tau_1 - \tau_2}$ . Так как  $\delta \rightarrow \infty$ , то эти асимптоты расположены в правой полуплоскости. При росте свободного параметра для уравнения (8) корни двигаются справа (из  $+\infty$ ) налево, а для уравнения (9) — слева направо (в  $+\infty$ ).

Тождественное равенство нулю остальных полиномов приводит либо к подобным случаям, либо к их комбинации.

Как уже говорилось, изменением параметров семейства можно перемещать начальные и предельные точки, например поместить их все левее мнимой оси. Вводя корректирующие звенья и связи, можно менять асимптотику и добиться, чтобы к мнимой оси приближались определенные корни. Все это позволяет синтезировать системы с наперед заданными свойствами.

В качестве иллюстрации применения общей теории рассмотрим так называемый линейный упредитель Смита [9]. Его блок-схема приведена на рис. 1. Здесь основной контур регулирования состоит из регулятора с передаточной функцией  $W_p$  и объекта, содержащего блок  $W_0$  и чистое запаздывание  $e^{-\rho\tau_0}$ . Для компенсации запаздывания вводится корректирующая обратная связь, в которой  $W_0$  и  $e^{-\rho\tau_0}$  моделируются функциями  $W_m$  и  $e^{-\rho\tau_m}$ . Передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$W = \frac{W_p W_0 e^{-\rho\tau_0}}{1 + W_p W_m + W_p [W_0 e^{-\rho\tau_0} - W_m e^{-\rho\tau_m}]}$$

При точном моделировании выражение в квадратных скобках равно нулю и из характеристического уравнения исключаются члены, содержащие экспоненты. Тем самым свободные движения такой системы будут соответствовать движениям системы без запаздывания. Однако поскольку точное совпадение указанных величин невозможно, логично рассматривать такую систему, как содержащую два запаздывания.

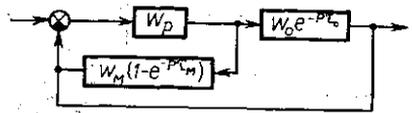


Рис. 1

Пусть передаточные функции отдельных блоков имеют вид

$$W_p = \frac{K_p}{p+15}, \quad W_0 = \frac{K_0}{(p+5)(p+9)}, \quad W_m = \frac{K_m}{(p+6)(p+10)},$$

а времена запаздывания —  $\tau_m = 1$ ,  $\tau_0 = 0,6$ . Тогда характеристическое уравнение (2) принимает вид

$$\Phi(p) e^{\rho\tau_m} + \rho [\sigma\Psi_1(p) e^{\rho\tau_m} + \Psi_2(p) e^{\rho\Delta\tau} + \sigma\Theta(p)] = 0, \quad (10)$$

где

$$\rho = K_p K_0, \quad \sigma = \frac{K_m}{K_0}, \quad \Delta\tau = \tau_m - \tau_0 = 0,4,$$

или, подставляя числовые значения:

$$(p+5)(p+6)(p+9)(p+10)(p+15)e^{\rho} + \rho [\sigma(p+5)(p+9)(e^{\rho} - 1) + (p+6)(p+10)e^{0,4\rho}] = 0. \quad (11)$$

Как следует из изложенного, асимптотами траекторий корней уравнения (10) слева являются горизонтальные прямые, отстоящие друг от

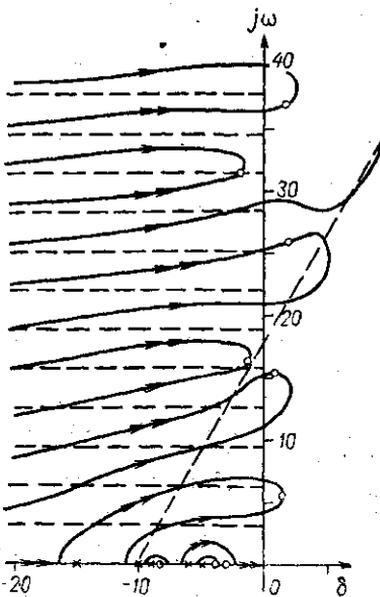


Рис. 2

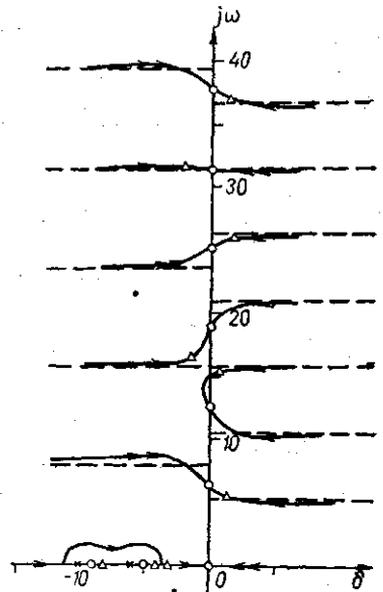


Рис. 3

друга на расстояние  $\frac{\pi}{\tau_m}$ , а справа — наклонные прямые. Так как разность степеней полиномов  $\Phi(p)$  и  $\Psi_1(p)$  равна трем, то вправо уходят две асимптоты под углами  $\pm 60^\circ$  к действительной оси. Траектории корней уравнения (11) при параметре семейства  $\sigma = 0,5$  представлены на рис. 2. Здесь одинарными стрелками обозначены траектории, на которых  $\rho > 0$ , а двойными —  $\rho < 0$ . Крестиками обозначены начальные точки, кружочками — предельные. При  $\rho_{кр} = 1147$  на правую полуплоскость выходит пара корней на частоте  $\omega_{кр} = 4,18$ . Корни, соответствующие более высоким частотам, при этом значении свободного парамет-

ра еще находятся слева от мнимой оси. Выше указывалось, что перемещение начальных и предельных точек по плоскости  $p$  при изменении параметров семейства существенно влияет на динамику системы. Как видно из уравнения (10) и рис. 2, начальные точки находятся в  $-\infty$ , а предельные точки можно перемещать, варьируя параметр семейства  $\sigma$  (при точном совпадении коэффициентов усиления модели и объекта  $\sigma=1$ ). Траектории корней для предельных точек в зависимости от  $\sigma$  представлены на рис. 3. Асимптотами здесь являются горизонтальные прямые, но в левой полуплоскости расстояние между ними равно  $\frac{\pi}{\Delta\tau}$ , а в правой  $-\frac{\pi}{\tau_m - \Delta\tau} = \frac{\pi}{\tau_0}$ . Движение корней при росте  $\sigma$  происходит навстречу друг другу из  $-\infty$  и из  $+\infty$ . Треугольниками обозначены положения корней при  $\sigma=0.5$ , что соответствует положению предельных точек на рис. 2.

Из рис. 3 видно, что при малых  $\sigma$  часть предельных точек находится далеко справа от мнимой оси. Это означает, что корни характеристического уравнения, двигаясь к этим предельным точкам, быстро выйдут на правую полуплоскость и система потеряет устойчивость уже при небольших значениях свободного параметра  $\rho$ , т. е. коэффициентов усиления в прямом канале (рис. 2). Увеличение  $\sigma$  приближает предельные точки к мнимой оси, однако часть их принципиально остается в правой полуплоскости. При этом ясно, что если точное равенство  $\tau_m = \tau_0$  не соблюдено, то значение  $\sigma=1$ , т. е. совпадение коэффициентов усиления модели и объекта, не является оптимальным. Точность моделирования звеньев  $W_m$ , как видно из рисунков, существенного значения не имеет, так как различие  $W_m$  и  $W_0$  вносит лишь локальные изменения в картину траекторий корней.

Изложенная теория и иллюстрирующий ее пример показывают возможности метода траекторий корней при рассмотрении сложных систем с запаздыванием.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Боровиков М. А., Инешин А. П., Логинов Г. В. Материалы первой Поволжской конференции по автоматическому управлению, кн. 1. Казань, 1971.
2. Bau Huang, Walter H. Chen, Ken Sheu Lu. «Int. J. Control», 18, No. 3, 1973.
3. Бендриков Г. А., Конев Ф. Б. «Автоматика и телемеханика», № 4, 1969.
4. Бендриков Г. А., Волков В. В. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 15, № 4, 1974.
5. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., 1971.
6. Понтрягин Л. С. «Изв. АН СССР», матем., 6, № 3, 1942.
7. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., 1964.
8. Мееров М. В. Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. М., 1967.
9. Бакли П. С. «Труды I Международного конгресса по автоматическому управлению», т. I. М., 1961.

Поступила в редакцию  
9.7 1974 г.

Кафедра  
физики колебаний