

УДК 534.211

А. В. ЕГОРЬЧЕВ, А. С. ПРУДНИКОВ, К. В. ЧЕРНЫШЕВ

О ПРИБЛИЖЕНИИ СЛАБОНЕОДНОРОДНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СТРУКТУР

Рассматривается частный случай теории волн в дискретных структурах — волны в слабонеоднородных одномерных дискретных структурах. Найдено приближенное представление произведения конечного числа матриц, дающее простое по форме описание волновых процессов в структурах такого типа. На конкретных примерах произведено сравнение расчетов по точной и приближенной формулам.

Многие задачи оптики, техники СВЧ, акустики и других областей физики [1] допускают представление исследуемой структуры в виде цепочки четырехполюсников, соединенных каскадно (рис. 1), и могут

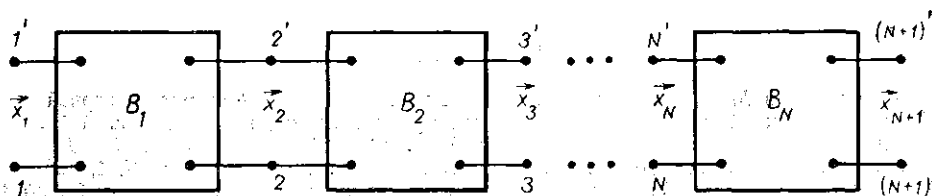


Рис. 1

быть решены методами теории волн в дискретных структурах [2]. Каждой четырехполюсной ячейке сопоставляется квадратная матрица размером 2×2 , определяющая преобразование какой-либо совокупности динамических переменных. Характеристическая матрица

$$B_n = \begin{pmatrix} B_{11}^{(n)} & b_{12}^{(n)} \\ B_{21}^{(n)} & b_{22}^{(n)} \end{pmatrix}$$

связывает значения динамических переменных на входе и выходе n -ной ячейки [2]:

$$x_{1,n} = b_{11}^{(n)} x_{1,n+1} + b_{12}^{(n)} x_{2,n+1}; \quad x_{2,n} = b_{21}^{(n)} x_{1,n+1} + b_{22}^{(n)} x_{2,n+1};$$

причем $b_{11}^{(n)} b_{22}^{(n)} - b_{12}^{(n)} b_{21}^{(n)} = 1$.

Точное решение задачи о распространении волны в произвольной дискретной структуре всегда известно: характеристическая матрица цепочки $B^{(N)}$ равна произведению характеристических матриц отдельных ячеек:

$$B^{(N)} = B_1 B_2 \dots B_{N-1} B_N B_{N+1} \dots B_{N-1} B_N. \quad (1)$$

Наличие решения (1) не избавляет от необходимости исследовать отдельные классы цепочечных структур, для которых возможно приближенное описание волновых процессов. Приближенные соотношения могут быть использованы при анализе и синтезе таких структур (просветляющих систем, интерференционных фильтров и пр. [3]). Приближенные представления характеристической матрицы $B^{(N)}$ рассмотрены, например, в [1, 4]. Настоящая работа отличается от остальных постановкой задачи и соответственно областью применимости полученных формул.

При получении приближенного представления матрицы $B^{(N)}$ будем исходить из формулы (1). Пусть s_{1n} и s_{2n} — характеристические адмитансы, а γ_n — постоянная распространения отдельной ячейки; тогда ее характеристическую матрицу можно представить в виде [2]

$$B_n = \frac{1}{s_{1n} + s_{2n}} \begin{pmatrix} s_{1n} e^{-\gamma_n} + s_{2n} e^{\gamma_n} & 2 \operatorname{sh} \gamma_n \\ 2 s_{1n} s_{2n} \operatorname{sh} \gamma_n & s_{1n} e^{\gamma_n} + s_{2n} e^{-\gamma_n} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В формуле (1) осуществим переход в новую (пока неопределенную) аффинную систему координат. При этом согласно [5], каждая матрица B_n преобразуется в подобную ей матрицу A_n , а матрица $B^{(N)}$ подобна матрице $A^{(N)}$, равной произведению преобразованных матриц:

$$A^{(N)} = A_1 A_2 \dots A_{N-1} A_N A_{N+1} \dots A_{N-1} A_N. \quad (3)$$

Рассмотрим преобразование подобия в виде $A_n = S^{-1} B_n S$, где $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ S_{01} & -S_{02} \end{pmatrix}$, и напомним элементы преобразованных матриц A_n , используя волновые параметры ячеек s_{1n} , s_{2n} , γ_n . Можно показать, что эти элементы имеют вид

$$a_{11}^{(n)} = e^{\gamma_n} + \frac{1}{2} \mu_n \delta_{1n} \delta_{2n} \operatorname{sh} \gamma_n; \quad a_{12}^{(n)} = -\delta_{2n} \left(1 + \frac{1}{2} \mu_n \delta_{2n} \right) \operatorname{sh} \gamma_n, \quad (4)$$

$$a_{21}^{(n)} = \delta_{1n} \left(1 + \frac{1}{2} \mu_n \delta_{1n} \right) \operatorname{sh} \gamma_n; \quad a_{22}^{(n)} = e^{-\gamma_n} - \frac{1}{2} \mu_n \delta_{1n} \delta_{2n} \operatorname{sh} \gamma_n,$$

где

$$\delta_{1n} = 2 \frac{S_{01} - s_{1n}}{S_{01} + S_{02}}, \quad \delta_{2n} = 2 \frac{S_{02} - s_{2n}}{S_{01} + S_{02}}, \quad \mu_n = \frac{S_{01} + S_{02}}{s_{1n} + s_{2n}}. \quad (5)$$

Из равенств (4) и (5) следует, что матрицы A_n диагональны в том случае, когда $\delta_{1n} = \delta_{2n} = 0$ (т. е. когда характеристические адмитансы ячеек s_{1n} и s_{2n} совпадают с величинами S_{01} и S_{02} , что имеет место в дискретной периодической структуре). Из равенств (4) и (5) вытекает также, что каждую матрицу A_n в новой системе координат можно представить в виде

$$A_n = \Lambda_n + \varepsilon_n^{(1)} + \varepsilon_n^{(2)},$$

где

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} e^{\gamma_n} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma_n} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_n^{(1)} = \operatorname{sh} \gamma_n \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{2n} \\ \delta_{1n} & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_n^{(2)} = \frac{\mu_n \operatorname{sh} \gamma_n}{2} \begin{pmatrix} \delta_{1n} \delta_{2n} & -\delta_{2n}^2 \\ \delta_{1n}^2 & -\delta_{1n} \delta_{2n} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Предположим, что 1) характеристические адмитансы ячеек цепочки мало отличаются друг от друга в совокупности и что 2) преобразование подобия можно при этом выбрать так, что

$$|\delta_{1n}| \ll 1, \quad |\delta_{2n}| \ll 1 \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (7)$$

Дискретные структуры, удовлетворяющие условию 1, будем называть слабооднородными. Из п. 2 следует, что элементы матриц $\varepsilon_n^{(1)}$ и $\varepsilon_n^{(2)}$ — малые величины (соответственно первого и второго порядка малости по δ_{1n} и δ_{2n}).

Подставляя выражение (6) в равенство (3), получаем $A^{(N)} = \prod_{n=1}^N (\Lambda_n + \varepsilon_n^{(1)} + \varepsilon_n^{(2)})$, и задача отыскания приближенных представлений матрицы $A^{(N)}$ сведена к перемножению N трехчленных матриц. Матрицу $A^{(N)}$ можно представить в виде

$$A^{(N)} = \sum_{k=0}^{2N} M_k^{(N)}, \quad (8)$$

вычисление коэффициентов $M_k^{(N)}$ происходит рекуррентно как по k , так и по N :

$$\begin{aligned} M_0^{(1)} &= \Lambda_1, \quad M_1^{(1)} = \varepsilon_1^{(1)}, \quad M_2^{(1)} = \varepsilon_1^{(2)}, \\ M_0^{(N)} &= M_0^{(N-1)} \Lambda_N, \quad M_1^{(N)} = M_1^{(N-1)} \Lambda_N + M_0^{(N-1)} \varepsilon_N^{(1)}, \\ M_k^{(N)} &= M_k^{(N-1)} \Lambda_N + M_{k-1}^{(N-1)} \varepsilon_N^{(1)} + M_{k-2}^{(N-1)} \varepsilon_N^{(2)}, \\ k &= 2, 3, \dots, 2N-2; \\ M_{2N-1}^{(N)} &= M_{2N-2}^{(N-1)} \varepsilon_N^{(1)} + M_{2N-3}^{(N-1)} \varepsilon_N^{(2)}, \quad M_{2N}^{(N)} = M_{2N-2}^{(N-1)} \varepsilon_N^{(2)}. \end{aligned}$$

Элементы матриц $M_k^{(N)}$ имеют k -тый порядок малости относительно δ_{1n} и δ_{2n} ($n = 1, 2, \dots, N$).

С помощью этих соотношений были вычислены в общем виде первые три коэффициента разложения (8):

$$\text{для } k=0 \quad M_0^{(N)} = \begin{pmatrix} e^\Gamma & 0 \\ 0 & e^{-\Gamma} \end{pmatrix}, \quad \text{где } \Gamma = \sum_{n=1}^N \gamma_n; \quad (9)$$

для $k=1$

$$M_1^{(N)} = \sum_{n=1}^N \operatorname{sh} \gamma_n \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{2n} e^{-\theta_n} \\ \delta_{1n} e^{\theta_n} & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где

$$\theta_n = \Gamma - 2\Gamma_n + \gamma_n; \quad \Gamma_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k.$$

для $k = 2$

$$M_2^{(N)} = - \sum_{n=2}^N \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{sh} \gamma_n \operatorname{sh} \gamma_k \begin{pmatrix} \delta_{2k} \delta_{1n} e^{-\theta_{kn}} & 0 \\ 0 & \delta_{1k} \delta_{2n} e^{\theta_{kn}} \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \mu_n \operatorname{sh} \gamma_n \begin{pmatrix} \delta_{1n} \delta_{2n} e^{\Gamma - \gamma_n} & -\delta_{2n}^2 e^{-\theta_n} \\ \delta_{1n}^2 e^{\theta_n} & -\delta_{1n} \delta_{2n} e^{-(\Gamma - \gamma_n)} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где $\theta_{kn} = -\Gamma - 2(\Gamma_k - \Gamma_n) + \gamma_n - \gamma_k$.

В дальнейшем вместо точного выражения (8) матрицы $A^{(N)}$ ограничимся ее приближенным представлением:

$$A_1^{(N)} = M_0^{(N)} + M_1^{(N)}. \quad (12)$$

До сих пор мы не конкретизировали преобразование подобия, полагая лишь, что выполнены условия (7). Разложение (12) позволяет приближенно определить волновые параметры дискретной структуры, которые определяются собственными векторами и собственными значениями матрицы. Величины S_{01} , S_{02} являются характеристическими адмитансами, а постоянная распространения входит в выражение элементов матрицы $A_1^{(N)}$.

Из соотношений (9) и (10) следует, что для диагонализации матрицы $A_1^{(N)}$ нужно выбрать величины S_{01} и S_{02} так, чтобы выполнялись два условия:

$$\sum_{n=1}^N e^{\theta_n} \operatorname{sh} \gamma_n \delta_{1n} = 0, \quad \sum_{n=1}^N e^{-\theta_n} \operatorname{sh} \gamma_n \delta_{2n} = 0. \quad (13)$$

С помощью равенства (5) и тождественного соотношения

$$\sum_{n=1}^N e^{\pm \theta_n} \operatorname{sh} \gamma_n \equiv \operatorname{sh} \Gamma \quad (14)$$

можно разрешить уравнения (13) относительно S_{01} и S_{02} . В результате получаем

$$S_{01} = \frac{1}{\operatorname{sh} \Gamma} \sum_{n=1}^N e^{\theta_n} \operatorname{sh} \gamma_n s_{1n}, \quad S_{02} = \frac{1}{\operatorname{sh} \Gamma} \sum_{n=1}^N e^{-\theta_n} \operatorname{sh} \gamma_n s_{2n}. \quad (15)$$

При таком выборе величин S_{01} и S_{02} матрица $A_1^{(N)}$ диагональна и равна $M_0^{(N)}$. Итак, в избранном приближении характеристические адмитансы слабонеоднородной дискретной структуры определяются соотношениями (15), а постоянная распространения — соотношением (9).

Произведем оценку точности полученного приближения. Представим матрицу $A^{(N)}$ в виде $A^{(N)} = \sum_{k=0}^N L_k^{(N)}$,

$$L_k^{(N)} = \sum_{n_1=1}^{N-k+1} \sum_{n_2=n_1+1}^{N-k+2} \dots \sum_{n_k=n_{k-1}+1}^N \Lambda(1, n_1 - 1) D_{n_1} \Lambda(n_1 + 1, n_2 - 1) D_{n_2} \dots \\ \dots D_{n_k} \Lambda(n_k + 1, N), \quad (16)$$

$$\Lambda(m, n) = \begin{pmatrix} \exp\left\{\sum_m^n \gamma_i\right\} & 0 \\ 0 & \exp\left\{-\sum_m^n \gamma_i\right\} \end{pmatrix}, \text{ причем } D_n = A_n - \Lambda_n.$$

Произведение (3) является функцией N матричных переменных A_n ($n=1, 2, \dots, N$), а формула (16) дает разложение в полином в окрестности точки $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N\}$. Если матрицы A_n и D_n ограничены по норме, т. е. имеют место неравенства $\|A_n\| \leq \lambda_0$, $\|D_n\| \leq d_0$ ($n=1, 2, \dots$), то, как можно показать, из выражений (12) и (16) следует оценка нормы отклонения точного решения от приближенного (12):

$$\|A^{(N)} - A_1^{(N)}\| \leq \|T\| + \sum_{k=2}^N C_N^k d_0^k \delta_0^{N-k}, \quad (17)$$

здесь $C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$, а символом $\|T\|$ обозначена норма матрицы второго слагаемого в выражении для $M_2^{(N)}$ (11).

Оценка (17) справедлива при любом выборе нормы матрицы; для исследования волновых процессов в дискретных структурах удобно использовать операторную норму матрицы, подчиненную эрмитовой норме векторов [5] (в нашем случае $\|x_n\|^2 = |x_{1,n}|^2 + |x_{2,n}|^2$). При таком выборе нормы, как можно показать с помощью простых, но громоздких выкладок, имеет место оценка

$$\|A^{(N)} - A_1^{(N)}\| \leq h_0 \delta_0^2 \mu_0 N e^{\alpha_0 N} + \sum_{k=2}^N C_N^k h_0^k \delta_0^k (1 + \mu_0 \delta_0)^k e^{\alpha_0(N-k)}, \quad (18)$$

причем $|\mu_n| \leq \mu_0$, $|\delta_{1n}| \leq \delta_0$, $|\delta_{2n}| \leq \delta_0$, $|\operatorname{sh} \gamma_n| \leq h_0$, $\operatorname{Re}[\gamma_n] \leq \alpha_0$ для всех $n=1, 2, \dots, N$. Из равенств (18) следует, что при выполнении условий 1 и 2, относящихся к слабонеоднородной структуре, ошибка приближения $A_1^{(N)}$ является величиной более высокого порядка малости, чем δ_{1n} и δ_{2n} .

Рассмотрим важный частный случай: четырехполосники, составляющие цепочку, являются симметричными, реактивными и прозрачными. В этом случае (см., например [2]) $s_{1n} = s_{2n} = s_n$ и величины s_n являются действительными, а соответствующие постоянные распространения γ_n — мнимыми. Из равенств (9) и (15) получаем выражение для волновых параметров дискретной структуры: $\gamma_n = i\beta_n$.

$$\Gamma = \sum_{n=1}^N \beta_n, \quad S_{01} = S_{02}^* = \frac{1}{\sin \Gamma} \sum_{n=1}^N s_n e^{i\theta_n} \sin \beta_n, \quad (19)$$

$$\theta_n = \Gamma - 2\Gamma_n + \beta_n, \quad \Gamma_n = \sum_1^n \beta_k.$$

Резльтирующий четырехполосник, отвечающий такой дискретной структуре, является реактивным, прозрачным и, вообще говоря, асимметричным (он симметричен в случае симметричного распределения s_n и β_n).

Предположим дополнительно, что

$$0 < \Gamma < \frac{\pi}{2}. \quad (20)$$

При выполнении этого условия, как следует из (10):

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_n < \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (21)$$

Пусть характеристические адмитансы ячеек заключены в некоторой области

$$s_{\min} \leq s_n \leq s_{\max} \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (22)$$

Тогда, учитывая соотношения (14) и (21), приходим к выводу, что реальная часть волнового адмитанса всей цепочки $X = \operatorname{Re}[S_{01}] = \operatorname{Re}[S_{02}]$ удовлетворяет неравенствам

$$s_{\min} \leq X \leq s_{\max}. \quad (23)$$

Отсюда, в частности, следует, что величина X существенно положительна; это соответствует общим свойствам четырехполюсников [2].

Произведем оценку точности формул (19) при выполнении условия (20). Из равенств (5) получаем

$$\delta_{1n} = \delta_{2n}^* = \frac{1}{X \sin \Gamma} \sum_{m=1}^N e^{i\theta_m} \sin \beta_m (s_n - s_m).$$

Неравенство (23) позволяет заключить, что

$$|\delta_{1n}| \leq \frac{s_{\max} - s_{\min}}{s_{\min}} \sum_{n=1}^N \sin \beta_n / \sin \Gamma. \quad (24)$$

Сравнивая неравенства (18) и (24), приходим к выводу, что достаточно положить:

$$\delta_0 = \frac{s_{\max} - s_{\min}}{s_{\min}} \frac{\Gamma}{\sin \Gamma}. \quad (25)$$

Аналогично проводится оценка величины μ_n ; в результате получаем: $\mu_0 = 1$.

Итак, при выполнении условия (20) точность приближенного представления (19) можно оценить с помощью неравенства

$$\|A^{(N)} - A_1^{(N)}\| \leq h_0 \delta_0^2 N + \sum_{k=2}^N C_N^k h_0^k \delta_0^k (1 + \delta_0)^k, \quad (26)$$

где $h_0 = \max_{1 \leq n \leq N} \{\sin \beta_n\}$, а δ_0 определяется равенством (25). Заметим, что величина N в неравенстве (26) ограничена условием (20). Полученная оценка позволяет заключить, что в рассмотренном случае слабонеоднородные дискретные структуры приближенно можно описывать с помощью волновых параметров, определяемых соотношениями (19). Ясно, кроме того, что при уменьшении величины h_0 допустимая область изменения характеристических адмитансов s_n (22) расширяется.

При любом приближенном способе определения волновых параметров дискретных структур существуют два случая резкой потери точности приближенных представлений. Это происходит, во-первых, когда в цепочке имеется ячейка, находящаяся на границе собственных

областей прозрачности и непрозрачности, и, во-вторых, когда определяются волновые параметры цепочки на границе ее областей прозрачности и непрозрачности. Первый из этих случаев следует из того, что квадрат характеристического адмитанса s^2 симметричного и реактивного четырехполюсника положителен в области прозрачности и отрицателен в области непрозрачности (см. [2]). На границе этих областей величина s^2 бесконечно мала или бесконечно велика, а дискретная структура, содержащая такой четырехполюсник, имеет бесконечно большую степень неоднородности. Этот случай соответствует «завороту» луча при распространении волны в слоистой среде [6].

Второй случай вытекает из определения постоянной распространения Γ_s дискретной структуры согласно равенству [2]:

$$\operatorname{ch} \Gamma_s = (B_{11} + B_{22})/2, \quad (27)$$

где B_{11} и B_{22} — диагональные элементы характеристической матрицы всей цепочки. При отсутствии потерь в цепочке правая часть (27) действительна, а ее абсолютная величина

>1 в области прозрачности и <1 в области непрозрачности. На границе этих областей ошибка в определении Γ_s может быть велика при малых ошибках в определении правой части.

Для проверки предложенного приближения было проведено сравнение численных расчетов по точной и приближенной формулам на двух примерах. Во-первых, была рассмотрена цепочка симметричных, реактивных и прозрачных четырехполюсников произвольной природы. Считалось, что характеристические адмитансы в цепочке изменяются гиперболически от 1 до 3 при изменении n от 1 до 20. Постоянные распространения ячеек цепочки предполагались одинаковыми и равными 0,20. Сравнивались элементы характеристических матриц, рассчитанные точно и приближенно. При точном расчете по волновым параметрам s_n и γ_n вычислялись элементы характеристических матриц B_n ($n=1, 2, \dots, N$) по формулам (2), при этом учитывалась симметрия ячеек. Затем по формуле (1) находилось точное значение элементов характеристической матрицы $B^{(N)}$ ($N=1, 2, \dots, 20$).

Приближенный расчет производился

по формулам (19) (вычисление волновых параметров) и (2) (вычисление элементов характеристической матрицы $B^{(N)}$). Результаты расчетов приведены на рис. 2. По оси абсцисс отложены значения числа ячеек в цепочке N , по оси ординат — значения элементов матрицы $B^{(N)}$. При фиксированном значении аргумента N значения функции определяют элементы характеристической матрицы цепочки, составленной из ячеек от первой до N -ной включи-

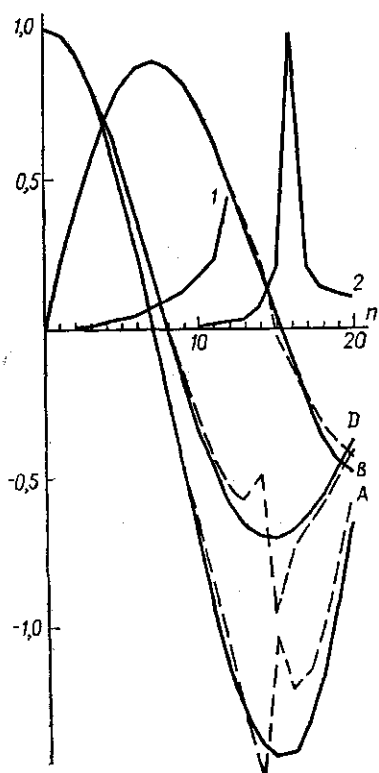


Рис. 2

тельно. Кривые A , B , D соответствуют величинам B_{11} , B_{12} , B_{22} (заме- тим, что B_{11} и B_{22} — действительны, а B_{12} — мнимы). Сплошные ли- нии построены на основании точного расчета, а штриховые — прибли- женного. Кривая I изображает поведение величины δ_0 (25). Величи- ны, входящие в выражение для δ_0 , относятся к цепочке, составленной

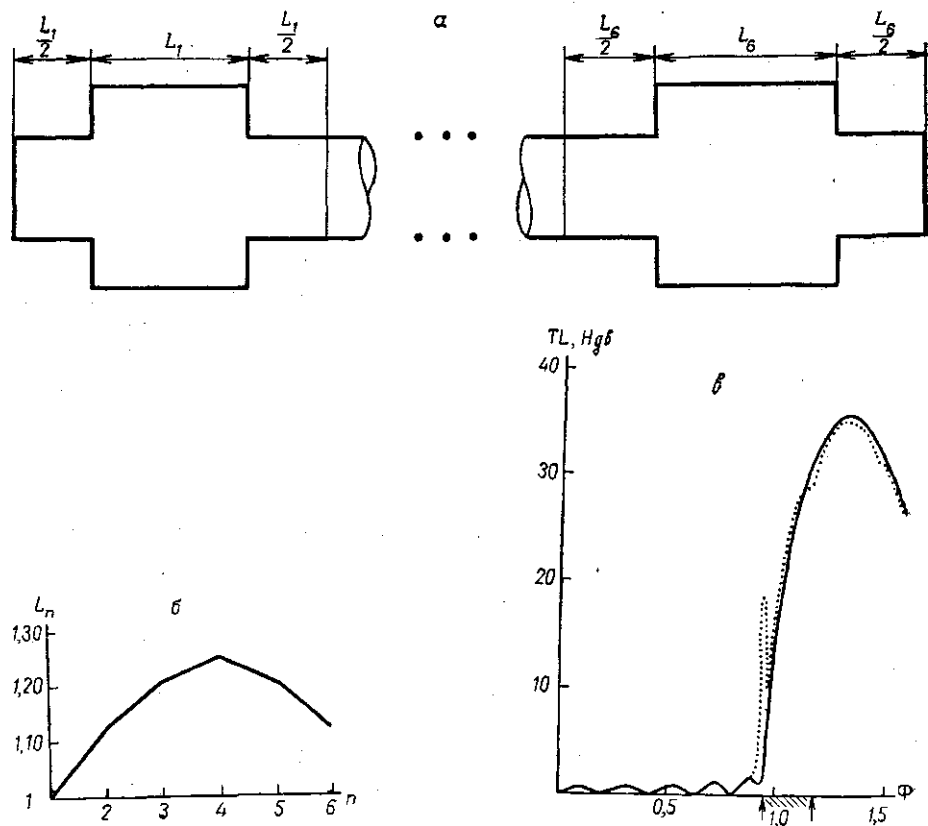


Рис. 3

из ячеек от первой до N -ной включительно ($N=1, 2, \dots, 20$). Из оценки (26) следует, что величина $\delta_0 h_0$ (в нашем примере $h_0=0,20$) опреде- ляет точность приближенного представления. Сравнивая графики рис. 2, можно заключить, что при изменении N от 1 до 11 совпадение точного и приближенного расчетов хорошее, а величина δ_0 описывает точность приближения. Кривая 2 также изображает поведение δ_0 , но в другом масштабе (она нормирована на величину собственного мак- симума). При достаточно больших δ_0 оценка (26) теряет ценность, од- нако, как следует из рис. 2, величина δ_0 качественно описывает точ- ность приближения. В частности, максимальная потеря точности про- исходит в окрестности максимума величины δ_0 .

В качестве второго примера была рассмотрена цепочка шести ка- мер расширения (рис. 3, а), длина отростков которых равнялась поло- вине длины камеры. Характеристическая матрица каждой камеры рассчитывалась в квазистатическом приближении [7]. Так же, как и в первом примере, точно и приближенно были рассчитаны элементы

характеристической матрицы цепочки. По элементам характеристической матрицы определялся коэффициент прохождения волны при условии, что справа и слева от цепочки — волновод бесконечной длины [4]. На рис. 3,б показано изменение длины камеры L_n в зависимости от числа n . На рис. 3,в изображен график частотной зависимости коэффициента прохождения звуковой волны. По оси абсцисс отложена величина волновой длины Φ первой камеры расширения; по оси ординат — величина, обратная коэффициенту прохождения (дБ). Сплошная линия соответствует точному расчету, пунктирная — приближенному. При изменении Φ от нуля до 0,95 все камеры цепочки находятся в полосе пропускания, а при $\Phi \geq 1,18$ — в полосе непропускания. В области $0,95 < \Phi < 1,18$ (обозначенной на рис. 3,в стрелками) возможны переходы из области прозрачности в область непрозрачности. В этой области возможна резкая потеря точности (при значениях $\Gamma \approx \pi n$, $n=1, 2, \dots, N$). При некотором удалении Φ от границы критической области в сторону уменьшения Φ точное и приближенное представления практически совпадают. В области общей непрозрачности четырехполосников точное и приближенное представления близки. Увеличение ошибки в этом случае учитывается в неравенстве (18) множителем $\exp\{\alpha_0(N-k)\}$ (равным 1 в случае цепочки из прозрачных четырехполосников).

В заключение авторы благодарят С. Н. Ржевкина за интерес, проявленный к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abeles F. «Ann. de Physique», 5, 596—640; 706—782, 1950.
2. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М., 1959.
3. Кард П. Г. Анализ и синтез многослойных интерференционных пленок. Таллин, 1971.
4. Фельдштейн А. Л., Явич Л. Р. Синтез четырехполосников и восьмиполосников на СВЧ. М., 1965.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1966.
6. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., 1973.
7. Егорьев А. В., Прудников А. С., Чернышев К. В. «Акустический журнал», 19, 352—358, 1973.

Поступила в редакцию
14.6 1974 г.

Кафедра
акустики