

Л. К. ЗАРЕМБО, К. М. ИВАНОВА-ШИЦ

К ВОПРОСУ О НАПРАВЛЕННОСТИ ТРЕХФОНОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

Квантостатистические представления о фоновом газе применяются для анализа трехфоновых взаимодействий. Показано, что направленность процессов при этом взаимодействии зависит от чисел заполнения фоновых ветвей и определяется стремлением системы к максимальной энтропии. В равновесии энергия в общем случае распределена по ветвям неравномерно, что свидетельствует о недостаточности трехфоновых взаимодействий для установления полного термодинамического равновесия. Анализируются случаи «слияния» и распада фононов.

Из инвариантности относительно знака времени и скорости (или знака волнового вектора) уравнений гидродинамики и теории упругости без диссипации и дисперсии следует обратимость волновых процессов, в том числе и нелинейных. Очевидно, если в прямом трехфоновом процессе (рис. 1, а) «слияния» фононов в третьей ветви $\Phi_1 + \Phi_2 \rightarrow \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$ выполнены условия сохранения энергии и квазиимпульса (условие синхронизма), то в обратном процессе (рис. 1, б) можно выделить два распадных: $\Phi_1 + \Phi_3 \rightarrow \Phi_2$; $\Phi_2 + \Phi_3 \rightarrow \Phi_1$ и один процесс «слияния» $\Phi_2 + \Phi_1 \rightarrow \Phi_3$, для каждого из которых также выполнены условия синхронизма. Легко видеть, что в любом трехфоновом взаимодействии при появлении ветви «слияния» наряду с прямым процессом возникает возможность обратного распадного процесса. Вместе с тем, как показывают многочисленные экспериментальные результаты, нелинейные волновые процессы имеют определенную направленность: в одних случаях превалируют процессы «слияния» фононов, в других — распадные процессы. Направленность нелинейного процесса характерна не только для когерентных, строго детерминированных волн, где существенное значение имеет постоянство относительных фаз взаимодействующих волн, но и для тех случаев, когда относительные фазы могут меняться случайным образом [1, 2]. В последнем случае направленность нелинейного волнового процесса определяется условиями стремления ансамбля случайных волн к равновесию. В этом случае для определения направленности процесса целесообразно вос-

¹ Термин «ветвь» применяется для фононов близкой энергии и импульса; эти фононы в фазовом пространстве могут быть в различных состояниях.

пользоваться методами неравновесной термодинамики, что и делается в этой работе.

Рассмотрим трехфононный процесс «слияния», показанный на рис. 1, а. Общее число фононов до взаимодействия $N = N_1 + N_2$, где N_1 и N_2 — числа фононов в первой и второй ветвях. Энтродпия до взаимодействия (см., например, [3])

$$S_0 = \sum_{i=1}^2 G_i \sigma(n_i), \quad (1)$$

где $\sigma(n_i) = (1 + n_i) \ln(1 + n_i) - n_i \ln n_i$, $n_i = N_i/G_i$ — исходные числа заполнения, G_i — число возможных состояний в фазовом пространстве для фононов i -той ветви. В процессе взаимодействия общее число фононов и распределение их по всем трем ветвям меняется. Если N'_1 и N'_2 — числа фононов, не принявших пока участия во взаимодействии, то текущее общее число фононов $N' = N'_1 + N'_2 + N'_3$, где $N'_3 = N_i - N'_i$ ($i=1, 2$). Энтродпия в промежуточном состоянии:

$$S = \sum_{i=1}^3 G'_i \sigma(n'_i), \quad (2)$$

где $n'_i = N'_i/G'_i$ — текущие числа заполнения, связанные с n_i очевидным соотношением

$$n'_i = n_i g_i \quad \in \in \eta_i \quad (i \neq 3). \quad (3)$$

Здесь $g_i = G_i/G'_i$, $\in \in = N'_3/N$, $\eta_i = N/G'_i$. Легко видеть из (3), что при $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ начальная энергия $E_0 = \hbar \sum_{i=1}^2 \omega_i G_i n_i$ при взаимодействии сохраняется.

Изменение энтропии:

$$\Delta S = S - S_0 = \sum_{i=1}^2 [G'_i \sigma(n_i g_i \in \in \eta_i) - G_i \sigma(n_i)] + G'_3 \sigma(\in \in \eta_3). \quad (4)$$

Из (4)

$$\kappa = \frac{\partial(\Delta S)}{\partial \in \in} = N \ln Y, \quad (5)$$

где

$$Y = \frac{1 + \in \in \eta_3}{\in \in \eta_3} \prod_{i=1}^2 \frac{n_i g_i \in \in \eta_i}{1 + n_i g_i \in \in \eta_i}.$$

Когда числа n_i ($i=1, 2$) заданы, равновесие устанавливается при условии $Y=1$, из которого следует квадратичное уравнение для $\in \in$:

$$\begin{aligned} \in \in^2 (\eta_1 \eta_2 + \eta_1 \eta_3 + \eta_2 \eta_3) - \in \in [\eta_3 + n_1 g_1 (\eta_2 + \eta_3) + \\ + n_2 g_2 (\eta_1 + \eta_3)] + n_1 n_2 g_1 g_2 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Если считать, что взаимодействие не меняет число возможных состояний исходных ветвей в фазовом пространстве $G_i = G'_i$ ($i=1, 2$), то переход к текущим числам заполнения по (3) сводит (6) к уравнению первого порядка:

$$n_{30} = \epsilon \eta_{30} = \frac{n_{10} n_{20}}{1 + n_{10} + n_{20}} \quad (7)$$

индексом нуль отмечены равновесные значения чисел заполнения. При малых числах заполнения n_{i0} ($i=1, 2$) из (7) следует, что число заполнения третьей ветви пропорционально произведению равновесных значений чисел заполнения первой и второй ветвей; при $n_{20} \approx n_{10} = n_0 \gg 1$ получаем $n_{30} \approx n_0$. При больших, но сильно отличающихся числах заполнения $n_{20} \gg n_{10} \gg 1$, $n_{30} \approx n_{10}$, т. е. число заполнения третьей ветви

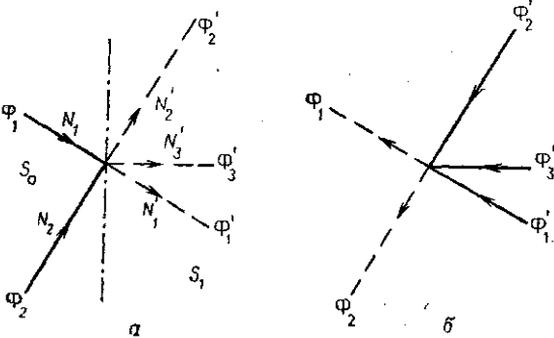


Рис. 1

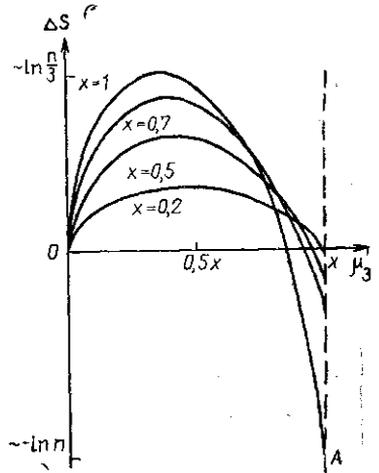


Рис. 2

равно числу заполнения слабой фоновой ветви. Отсюда следует невозможность «перекачки» в комбинационную ветвь всей энергии слабой ветви², хотя при определенных условиях в равновесии энергия комбинационной ветви может превышать энергию слабой ветви.

В (1)–(6) мы не ограничивали общности и считали, что каждая из фоновых ветвей имеет различные области G_i и что размеры этих областей меняются после взаимодействия $G_i \neq G'_i$. Определение этих областей и их трансформации представляет собой самостоятельную задачу и рассматриваться в этой работе не будет. Можно только сказать, что при трехфоновых взаимодействиях, по-видимому, возможна не только «дефокусировка» в фазовом пространстве, но и при определенных условиях «фокусировка», что соответствует временной и пространственной «монохроматизации» волн после взаимодействия.

Представляет интерес выразить n_{30} через начальные числа заполнения исходных ветвей. Ограничимся рассмотрением задачи без изменения чисел состояний в фазовом пространстве: $G_i = G'_i$ ($i=1, 2$) и $G_3 = G_3 = G$, тогда $g_i = 1$, $\eta_i = \eta = N/G$. Из условия равновесия ($Y=1$) и (3) следует, что всегда при равновесии $n_{30} < n_2, n_1$, т. е. не может быть полного перехода фононов (хотя бы одной из исходных ветвей) в третью ветвь. Для удобства будем считать $n_1 = nx$ и $n_2 = n$ ($x \leq 1$). Введем также относительные числа заполнения $\mu'_i = n'_i/n$ ($i=1, 2, 3$). Из (3) следуют очевидные соотношения:

$$\mu'_1 = x - \mu'_3, \quad \mu'_2 = 1 - \mu'_3. \quad (8)$$

² Случай строгой когерентности, как уже отмечалось, здесь не рассматривается.

Из (6) равновесное число заполнения третьей ветви:

$$n_{30} = \epsilon \eta = \frac{1}{6} \{1 + 2n(1+x) \pm [1 + 4n^2(x^2 - x + 1) + 4n(x+1)]^{1/2}\}. \quad (9)$$

Рассмотрим случай $n \gg 1$. Если в (9) взять верхний знак, то для корня n_{30+} получим $\mu'_3 \gg x$ и не выполняются условия (8); $\mu'_3 = x$ требует особого рассмотрения и, как показывает анализ, не является экстремальной точкой для ΔS . Поэтому корень n_{30-} определяет единственное устойчивое положение равновесия с максимумом ΔS .

Вид функции $\Delta S = \varphi(\mu'_3)$ при разных x показан на рис. 2. В начале процесса взаимодействия при $\epsilon \rightarrow 0$, $x \sim \ln \frac{1}{\epsilon} \rightarrow +\infty$ энтропия быстро растет, происходит активное «слияние» фононов. По мере заполнения третьей ветви наряду со «слиянием» начинают все большую роль играть обратные процессы, из-за чего скорость роста энтропии уменьшается, и, наконец, при компенсации прямых процессов обратными наступает равновесие. Эффективность перехода фононов из исходных ветвей в третью зависит от x и максимальна при равных исходных числах заполнения ($x=1$). В равновесии равномерное распределение энергии по всем трем ветвям при $x=1$ будет лишь в частном случае равных частот ($\omega_1 = \omega_2$). При $x \neq 1$ равномерное распределение энергии достигается лишь при определенном соотношении частот $\omega_2/\omega_1 = (x-1) + (x^2 - x + 1)^{1/2}$. Это свидетельствует о недостаточности в общем случае однократных трехфононных взаимодействий для установления равномерного распределения энергии во всех фононных ветвях и, следовательно, об ограниченности правила Мэнли—Роу.

Из рис. 2 следует также, что при относительных числах заполнения $\mu'_3 < \mu_{30}$ происходит преимущественно «слияние» фононов первой и второй ветвей; обратные распадные процессы превалируют при $\mu'_3 > \mu_{30}$. Следовательно, направленность трехфононных процессов определяется стремлением системы к равновесию, которое, в свою очередь, зависит от относительных чисел заполнения. Необратимый характер трехфононных взаимодействий в этой статистической модели очевиден. ΔS -диаграмма, показанная на рис. 2, позволяет также получить качественные сведения о трехфононных процессах различных типов. Например, при малом $\gamma = x - \mu'_3$, но конечном μ'_2 , по (8) первая ветвь почти не заполнена, рост энтропии при этом соответствует распадному процессу $\Phi_2 + \Phi_3 \rightarrow \Phi_1$; отметим, что по (5) при этом $x \sim \ln \gamma$ и при $\gamma \rightarrow 0$ $x \rightarrow -\infty$: откуда следует активность начала распадного процесса. Скорость дальнейшего развития распадного процесса зависит от $\mu'_2 \approx 1 - x = \delta$. При $\delta \ll 1$ происходит распад сильного сигнала третьей ветви под действием слабого сигнала второй ветви; рост энтропии при этом соответствует параметрическому усилению слабого сигнала мощной накачкой μ , частота которой выше частоты сигнала³. При $\delta < 1$ (исключая $\delta=1$, так как при этом ΔS -диаграмма стягивается в точку: $\mu'_3 = 0$, $\Delta S = 0$) возможны ситуации, при которых распадный процесс идет при более мощной низкочастотной волне μ_2 , чем волна μ_3 . Из ΔS -диаграммы видно, что параметрическое усиление

³ Отсутствие в этом процессе порога усиления объясняется особенностями выбранной модели, т. е. отсутствием теплового фононного резервуара, который приводил бы к конечному времени жизни рассматриваемых фононов.

идет тем более эффективно, чем слабее сигнал μ_2' . В распадной области $\Delta S < 0$, следовательно, распадные ситуации менее вероятны, чем ситуации «слияния», и еще менее вероятны параметрические ситуации, так как они соответствуют большим отклонениям системы от равновесия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахманов С. А., Чиркин А. С. Статистические явления в нелинейной оптике. М., 1971.
2. Руденко О. В., Чиркин А. С. «Акустический журнал», 20, 297, 1974.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М., 1964.

Поступила в редакцию
3.10 1974 г.

Кафедра
акустики