Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1975

УДК 538.3 : 530.145

Ю. М. ЛОСКУТОВ, В. В. СКОБЕЛЕВ

ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ НА ЯДРАХ В СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Исследуется тормозное излучение электронов на ядрах в сильном постоянном и однородном магнитном поле. Получена формула для спектрального и углового распределения излучения с учетом его поляризации.

Проблема распознавания природы радио и светового излучения, приходящего от космических объектов, вызывает в последнее время большой интерес. Сейчас можно считать доказанным, что не последнюю роль здесь играют сильные магнитные поля, которые обусловливают интенсивное (синхротронное) излучение заряженных частиц [1]. При полях порядка 10^9 Гс и выше существенный вклад может дать тормозное излучение электронов на ядрах, поляризационные свойства которого определяются наличием магнитного поля. Такие поля могут реализоваться на поверхности нейтронных звезд (пульсаров) [2], радиоизлучение которых, возможно, и вызвано в конечном счете этим эффектом. На это было указано в [3], где исследуется случай «одномерного» излучения, когда меняется импульс электрона вдоль поля и не учитываются изменения размеров его «орбиты». Такой подход оправдан при нерелятивистских энергиях в больших полях. Однако при вычислении матричных элементов авторы используют функцию Грина свободного электронного поля, что эквивалентно учету основного члена разложения по параметру $\mathcal{H}/\mathcal{H}_0$, где $\mathcal{H}_0 = m_0^2c^3/e_0\hbar$, и, следовательно, их метод не может дать удовлетворительного результата при полях $\mathcal{H}$, сравнимых с критическим $\mathcal{H}_0$.

В нашем подходе используется метод деления на оператор Дирака [4, 5]:

$$\hat{D} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - c\,(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{P}) - \rho_3 m_0 c^2, \tag{1}$$

что позволяет избежать подобных ограничений на величину магнитного поля (здесь $\mathbf{P}$ — оператор обобщенного импульса, остальные обозначения имеют обычный смысл).

Вероятность перехода электрона в единицу времени из состояния ψ_i в конечное состояние ψ_f дается формулой

$$w = \frac{\partial}{\partial t}\,(C_{if}^{\dagger}C_{if})\,|_{t\to\infty}, \tag{2}$$

где

$$C_{if} = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' \int d^3x \psi_f^+ W^+ \psi_i,$$

а оператор W^+ имеет следующий вид:

$$W^+ = \frac{4\pi Z e_0^3}{L^{9/2}} \sum_{\varkappa_1, \varkappa'} \sqrt{\frac{2\pi c\hbar}{\varkappa}} \cdot \frac{e^{i\varkappa' R}}{\varkappa'^2} \{(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{a}^+) e^{ic\varkappa t - i\varkappa \mathbf{r}} \times$$

$$\times D^{-1} e^{-i\varkappa'\mathbf{r}} + e^{-i\varkappa'\mathbf{r}} D^{-1} (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{a}^+) e^{ic\varkappa t - i\varkappa\mathbf{r}}\}. \qquad (3)$$

Здесь $\mathbf{a}^+$ — операторы рождения фотона с импульсом $\varkappa$ и определенной поляризацией; Ze_0 — заряд неподвижного ядра, а $\mathbf{R}$ — его радиус-вектор. Операция деления на D определяется таким образом, чтобы удовлетворялось соотношение $DD^{-1}=1$. Используя свойство эрмитовости оператора D^{-1}, получаем

$$w(n', s', k_3') = \frac{16\pi^2\alpha^3 Z^2 c}{L^5} \sum_{\varkappa} \frac{K_0^2(|\varkappa_3'| R_\perp)}{\varkappa} |u_{if}|^2 \delta(K - K' - \varkappa), \qquad (4)$$

где

$$u_{if} = \int dx dy e^{-i(\varkappa\mathbf{r})_\perp} \psi_{n's'}^+ \cdot \left[(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{a}^+) \frac{2K - \alpha_3\varkappa_3'}{\varkappa_3'(2k_3 - \varkappa_3')} - \frac{2K' + \alpha_3\varkappa_3'}{\varkappa_3'(2k_3' + \varkappa_3')} (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{a}^+)\right] \psi_{ns}.$$

Ось z здесь совпадает с направлением постоянного и однородного магнитного поля $\mathcal{H}$, а

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{L}} \psi_{ns} e^{-icKt + ik_3 z}$$

есть волновая функция электрона в таком поле, описывающая состояние с энергией $E = c\hbar K$, z-компонентом импульса $p_3 = \hbar k_3$, с главным квантовым числом n и радиальным числом s, причем $K = \sqrt{4\gamma n + k_3^2 + k_0^2}$ (используется решение в цилиндрических координатах [4]). Штрихованные величины относятся к конечному состоянию электрона. Введены также следующие обозначения:

$$\alpha = e_0^2/c\hbar, \quad R_\perp = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}, \quad (\varkappa\mathbf{r})_\perp = \varkappa_1 x + \varkappa_2 y,$$

$$k_0 = m_0 c/\hbar, \quad \gamma = e_0\mathcal{H}/2c\hbar, \quad \varkappa_3' = k_3 - k_3' - \varkappa_3.$$

Отметим, что формула (4) получена с использованием приближенного равенства $\exp\{-i(\varkappa'\mathbf{r})_\perp\} \approx 1$, которое вытекает из условия

$$(\bar{r}/R_\perp) \ll 1, \quad \bar{r} \sim (n/\gamma)^{1/2}, \qquad (5)$$

так как в сумму по $\varkappa'$ в (3) основной вклад дадут члены с $\varkappa_{1,2}' \lesssim R_\perp^{-1}$. Условие (5) эквивалентно следующему соотношению, связывающему рассматриваемые нами возможные значения величины $R_\perp$ с энергией электрона E и напряженностью поля $\mathcal{H}$:

$$R_\perp \gg \frac{1}{k_0} \frac{k_\perp}{k_0} \frac{H_0}{H}, \qquad k_\perp = \sqrt{4\gamma n}. \qquad (6)$$

При выполнении условия (5) суммирование по $\varkappa'$ в (3) проводится по формуле

$$\frac{1}{L^2}\sum\frac{e^{i\varkappa'\mathbf{R}}}{\varkappa'^2}\to\frac{e^{i\varkappa_3'R_3}}{(2\pi)^2}\int\frac{e^{i(\varkappa'\mathbf{R})_\perp}}{\varkappa'^2}d\varkappa_1'd\varkappa_2'=\frac{e^{i\varkappa_3'R_3}}{2\pi}K_0(|\varkappa_3'|R_\perp),$$

где $K_0(x)$ — функция Макдональда.

Матричные элементы в (4) вычисляются по известным формулам [4], и после усреднения по начальным и суммирования по конечным спиновым состояниям электрона получаем для π-компонента излучения следующее выражение:

$$dw_\pi(n',\varkappa,\theta)=\frac{2c\alpha^3Z^2}{\pi L}\frac{\varkappa K'}{|k_3'|}\sum\frac{K_0^2(|\varkappa_3'|R_\perp)}{\varkappa_3'^2(2k_3-\varkappa_3')^2(2k_3'+\varkappa_3')^2}\times$$

$$\times\left\{q^2\left[\left(1-\frac{k_0^2+k_3k_3'}{KK'}\right)(I_{n,n'-1}^2+I_{n-1,n'}^2)-2\beta_\perp\beta_\perp'I_{n,n'-1}I_{n-1,n'}\right]+\right.$$

$$+\varkappa_3^2\varkappa_3'^2\left[\left(1+\frac{k_0^2-k_3k_3'}{KK'}\right)(I_{n,n'-1}^2+I_{n-1,n'}^2)+2\beta_\perp\beta_\perp'I_{n,n'-1}I_{n-1,n'}\right]-$$

$$\left.-2q\varkappa_3\varkappa_3'\left(\frac{k_3'}{K'}-\frac{k_3}{K}\right)(I_{n,n'-1}^2+I_{n-1,n'}^2)\right\}d\varkappa\sin\theta d\theta,\qquad(7)$$

где $q=K(2k_3'+\varkappa_3')-K'(2k_3-\varkappa_3')$, $x=\frac{\varkappa^2\sin^2\theta}{4\gamma}$, θ — угол между $\varkappa$ и $\mathbf{H}$, а сумма берется по двум возможным значениям $k_3'=\pm\sqrt{(K-\varkappa)^2-4\gamma n'-k_0^2}$. Входящая в (7) функция $I_{n,m}(x)$ связана с полиномами Лагерра:

$$I_{n,m}(x)=\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{n!m!}}x^{\frac{n-m}{2}}Q_m^{n-m}(x),$$

а суммирование по s' было выполнено по формуле $\sum_{s'}I_{ss'}^2(x)=1$. Для σ-компонента излучения аналогично получаем

$$dw_\sigma(n',\varkappa,\theta)=\frac{2c\alpha^3Z^2}{\pi L}\frac{\varkappa K'}{|k_3'|}\sum\frac{K_0^2(|\varkappa_3'|R_\perp)}{\varkappa_3'^2(2k_3-\varkappa_3')^2(2k_3'+\varkappa_3')^2}\times$$

$$\times\{A\cos^2\theta+B\sin^2\theta+2C\sin\theta\cos\theta\}d\varkappa\sin\theta d\theta,\qquad(8)$$

где коэффициенты A, B и C имеют вид

$$A=q^2\left[\left(1-\frac{k_0^2+k_3k_3'}{KK'}\right)(I_{n,n'-1}^2+I_{n-1,n'}^2)+2\beta_\perp\beta_\perp'I_{n,n'-1}I_{n-1,n'}\right]+$$

$$+\varkappa_3^2\varkappa_3'^2\left[\left(1+\frac{k_0^2-k_3k_3'}{KK'}\right)(I_{n,n'-1}^2+I_{n-1,n'}^2)-2\beta_\perp\beta_\perp'I_{n,n'-1}I_{n-1,n'}\right]-$$

$$-2q\varkappa_3\varkappa_3'\left(\frac{k_3'}{K'}-\frac{k_3}{K}\right)(I_{n,n'-1}^2+I_{n-1,n'}^2),$$

$$B=q^2\left[\left(1-\frac{k_0^2-k_3k_3'}{KK'}\right)(I_{n-1,n'-1}^2+I_{n,n'}^2)-2\beta_\perp\beta_\perp'I_{n-1,n'-1}I_{n,n'}\right]+$$

$$+\varkappa_3'^2(k_3+k_3')^2\left[\left(1+\frac{k_0^2+k_3k_3'}{KK'}\right)(I_{n-1,n'-1}^2+I_{n,n'}^2)+2\beta_\perp\beta_\perp'I_{n-1,n'-1}I_{n,n'}\right]-$$

$$-2q\varkappa_3'(k_3+k_3')\left(\frac{k_3'}{K'}+\frac{k_3}{K}\right)(I^2_{n-1,n'-1}+I^2_{n,n'}),$$

$$C=\beta_\perp(I_{n,n'-1}I_{n-1,n'-1}+I_{n-1,n'}I_{n,n'})\left[-q^2\frac{k_3'}{K'}-\varkappa_3\varkappa_3'^2(k_3+k_3')\frac{k_3'}{K'}+\right.$$

$$\left.+q\varkappa_3'(k_3+k_3'+\varkappa_3)\right]+\beta_\perp'(I_{n,n'-1}I_{nn'}+I_{n-1,n'}I_{n-1,n'-1})\left[-q^2\frac{k_3}{K}+\right.$$

$$\left.+\varkappa_3\varkappa_3'^2(k_3+k_3')\frac{k_3}{K}+q\varkappa_3'(k_3+k_3'-\varkappa_3)\right].$$

Формулы (8) и (7) описывают тормозное излучение, происходящее в общем случае с изменением квантового числа n $(n'\neq n)$, т. е. с изменением радиуса «орбиты» электрона.

При нерелятивистских энергиях электронов с выполнением условия $\frac{k_\perp}{k_0}\frac{\mathscr{H}_0}{\mathscr{H}}\left(\frac{k_3}{k_0}\right)^2\ll 1$ основной вклад будут давать переходы с $n'=n$, в чем нетрудно убедиться, используя асимптотическое разложение функций $I_{n,m}(x)$, справедливое для $nx\ll 1$:

$$I_{n,m}(x)\approx\delta_{n,m}+\sqrt{nx}\,\delta_{n-1,m}-\sqrt{(n+1)x}\,\delta_{n+1,m}+\ldots \tag{9}$$

В нерелятивистском пределе π-компонент излучения исчезает, а для σ-компонента получаем

$$dw_\sigma^{(\text{нер})}(\varkappa,\theta)=\frac{8c\alpha^3Z^2}{\pi L}\cdot\frac{\varkappa k_0}{(k_3^2-2k_0\varkappa)^{1/2}}\cdot\left\{\frac{K_0^2(R_\perp|k_3-\sqrt{k_3^2-2k_0\varkappa}|)}{(k_3+\sqrt{k_3^2-2k_0\varkappa})^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{K_0^2(R_\perp|k_3+\sqrt{k_3^2-2k_0\varkappa}|)}{(k_3-\sqrt{k_3^2-2k_0\varkappa})^2}\right\}d\varkappa\sin^3\theta d\theta. \tag{10}$$

Если $\mathscr{H}\sim\mathscr{H}_0$ и, следовательно, в нерелятивистском случае $n=0$, то результат в два раза меньше.

Потерю энергии электроном на излучение в единицу времени при прохождении через вещество с числом ядер в единице объема N_0 можно определить следующим образом. В (3) необходимо просуммировать по радиус-векторам всех ядер, удовлетворяющих условию (6). Тогда для нахождения спектральной интенсивности излучения формулы (7), (8) и (10) нужно умножить на энергию одного фотона $c\hbar\varkappa$ и сделать замену

$$\frac{1}{L}K_0^2(|\varkappa_3'|R_\perp)\to F=\frac{1}{L}\left\langle\sum_{\alpha,\alpha'=1}^{N}K_0(|\varkappa_3'|R_\perp^\alpha)K_0(|\varkappa_3'|R_\perp^{\alpha'})e^{i\varkappa_3'(R_3^\alpha-R_3^{\alpha'})}\right\rangle, \tag{11}$$

где N — общее число ядер, а символ $<\ >$ означает среднее по статистическому ансамблю. Имеем, очевидно,

$$F=\frac{N(N-1)}{L}\langle K_0(|\varkappa_3'|R_\perp^{(1)})K_0(|\varkappa_3'|R_\perp^{(2)})\cos[\varkappa_3'(R_3^{(1)}-R_3^{(2)})]\rangle+$$

$$+\frac{N}{L}\langle K_0^2(|\varkappa_3'|R_\perp)\rangle.$$

Первый член можно вычислить, зная парную корреляционную функцию ансамбля. Однако обычно он много меньше второго, поэтому

$$F \approx \frac{N}{L} \int\limits_{\sim \bar{r}}^{\infty} K_0^2(|\varkappa_3'|r) \frac{2\pi r}{L^2} dr = \frac{2\pi N_0}{\varkappa_3'^2} \int\limits_{\sim |\varkappa_3'|\bar{r}}^{\infty} K_0^2(x)\, x dx.$$

В нерелятивистском случае нижний предел интегрирования $|\varkappa_3'|\bar{r} \sim \frac{k_\perp}{k_0} \frac{\mathscr{H}_0}{\mathscr{H}} \frac{k_3}{k_0} \ll 1$, т. е. его можно положить равным нулю, и интеграл при этом изменится незначительно. Таким образом, те из ядер, координаты которых не удовлетворяют условию (6), дадут малый вклад в суммарное излучение (к такому же выводу можно прийти, если учесть, что интенсивность излучения растет логарифмически с уменьшением $R_\perp$, в то время как число ядер падает по линейному закону). Окончательно в нерелятивистском приближении имеем

$$F \approx \frac{\pi N_0}{\varkappa_3'^2}. \tag{12}$$

Подставляя это в (10) и интегрируя по углу θ, находим для спектральной интенсивности излучения

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{16}{3} \frac{N_0 Z^2 e_0^6}{m_0 c^2} (c^2 p^2 - 2m_0 c^2 \cdot \hbar\omega)^{-1/2}. \tag{13}$$

Интегрируя по ω, получаем полную интенсивность

$$I = \frac{16}{3} N_0 Z^2 e_0^6 \cdot \frac{v}{\hbar m_0 c^3}. \tag{14}$$

При $\hbar \to 0$ $\frac{dI}{d\omega}$ конечно и не зависит от частоты. Таким образом, фактически формула (13) имеет классическую природу. В самом деле, элементарный классический расчет ($dI/d\omega$) для случая одномерного движения заряда по прямой дает для вклада дипольного излучения на малых частотах в точности результат (13) при $\hbar = 0$ (с учетом, что (13) надо уменьшить в 2 раза, так как при одномерном движении $p_\perp = 0$ и $n = 0$). Полная интенсивность является конечной величиной из-за учета квантовых свойств света ($\hbar \neq 0$).

Простой результат (13) позволяет надеяться на возможность наблюдения «одномерного» тормозного излучения в спектре излучения пульсаров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сб. «Синхротронное излучение». М., 1966.
2. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика. М., 1967.
3. Canuto V., Chiu H., Fassio-Canuto L. «Phys. Rev.», 185, 1607, 1969.
4. Соколов А. А. Введение в квантовую электродинамику. М., 1958.
5. Лоскутов Ю. М., Скобелев В. В. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астр., 14, № 3, 75, 1973; «Оптика и спектроскопия», 34, 497, 1973.

Поступила в редакцию
18.10 1974 г.

Кафедра
теоретической физики