Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1975

УДК 539.121.7

А. К. БАХТАДЗЕ

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ФУНКЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ЭЛЕКТРОННО-ФОТОННОМ ЛИВНЕ БЕЗ УЧЕТА ИОНИЗАЦИОННЫХ ПОТЕРЬ

Найдено приближенное выражение для функции пространственного распределения электронов и числа частиц в круге радиуса R с энергией больше E в ливне, вызванном электроном или фотоном с энергией E_0 при условии $E/E_0 \ll 1$ в приближении Ландау без учета ионизационных потерь.

В работах по каскадной теории электронно-фотонных ливней [1—8, 9] функция пространственного распределения частиц в ливне вычислялась различными приближенными методами. В ряде работ эта задача сводилась к вычислению первых нескольких моментов по радиусу и к построению искомой функции по этим нескольким моментам. К сожалению, последовательные моменты с ростом порядкового номера, как, например, показано в [10], расходятся, поэтому ничего нельзя сказать о точности полученной таким образом функции. Наиболее подробная теория решения исходных уравнений развита в [6, 8]. В этих трудах исходные уравнения теории в приближении Ландау преобразуются в дифференциально-разностные уравнения для образов Фурье — Меллина — Лапласа искомых функций, решение этих уравнений проведено в [6, 8] лишь с помощью приближенных методов. В [8] получены уравнения для образов функций только углового и пространственно-углового распределений. В [10] впервые получены уравнения для образа Меллина — Лапласа функции только пространственного распределения электронов без учета ионизационных потерь и даны точные аналитические выражения для образов Меллина первых четырех моментов по радиусу от этой функции при условии $E/E_0 \ll 1$ (E — энергия частиц в ливне, E_0 — энергия частицы, вызвавшей ливень). В [9] рассчитаны первые несколько моментов функций углового и пространственного распределений и дана оценка поведения функции пространственного распределения электронов с энергией больше E для конечных значений E/E_0. Недостатком метода, развитого в [9], является необходимость вычислять смешанные пространственно-угловые моменты для получения искомых моментов по углу и по радиусу.

В настоящей работе мы излагаем последовательную теорию аналитического решения исходных уравнений, модернизируя ту, которая

развита в [8], и находим более простые уравнения для тех же функций, которые определяются соответствующими дифференциально-разностными уравнениями. Выясняя основные черты поведения решения этих уравнений, мы находим приближенную аналитическую формулу для этого решения и на ее основе вычисляем приближенную функцию пространственного распределения электронов с энергией больше E и число частиц в круге радиуса R без учета ионизационных потерь, при условии $E/E_0 \ll 1$.

Кроме того, в настоящей работе мы получаем лишь приближенные, но простые аналитические выражения для функции пространственного распределения электронов и числа частиц в круге радиуса R, пригодные для использования в дальнейшей теории электронно-фотонных ливней и в частности для вычисления флуктуаций числа частиц в ливне, а также для достаточно быстрых численных оценок. Исходные уравнения теории в приближении Ландау сформулированы в [1, 8]. Без учета ионизационных потерь они имеют следующий вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial}{\partial \bar{r}}\right) P(E_0, E, t, \mathbf{r}, \theta) =$$

$$= A'P + B'\Gamma + \frac{E_k^2}{4E^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2}\right)P, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \theta \frac{\partial}{\partial \bar{r}}\right)\Gamma(E_0, E, t, \mathbf{r}, \theta) = C'P - \sigma_0\Gamma, \tag{2}$$

где P и Γ — функции распределения электронов и фотонов с энергией E на глубине t в каскадных единицах с направлением движения и положением, определяемым векторами $\mathbf{r}$, θ, которые лежат в плоскости, нормальной к оси ливня, $\mathbf{r} = \{x, y\}$ определяет положение частицы в этой плоскости на глубине t, $\theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ равен проекции единичного вектора направления движения частицы на плоскость, нормальную к оси ливня. Если угол направления движения частицы с осью ливня мал, то θ_1 и θ_2 равны углам с осью ливня проекций направления движения частицы на 2 взаимно перпендикулярные плоскости, пересекающиеся вдоль оси ливня. Вид интегральных по энергии операторов A', B', C' дан в [11].

Для решения уравнений (1), (2) умножим их на $E^s \exp[-\lambda t + i(\varkappa\mathbf{r}) + i(\xi\theta)]$ и проинтегрируем по E от 0 до E_0, по t от 0 до ∞ и по Σ, $\bar{\theta}$ от $-\infty$ до $+\infty$. Получим уравнения

$$\left(\lambda - \varkappa \frac{\partial}{\partial\zeta}\right) P(E_0, s, \lambda, \varkappa, \zeta) = -A(s)P + B(s)\Gamma -$$

$$- \frac{E_n^2 \zeta^2}{4} P(E_0, s-2, \lambda, \varkappa, \zeta) + f_1(E_0, s, \varkappa, \zeta), \tag{3}$$

$$\left(\lambda + \sigma_0 - \varkappa \frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\Gamma(E_0, s, \lambda, \varkappa, \zeta) = C(s)P + f_2(E_0, s, \varkappa, \zeta). \tag{4}$$

Функции $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ определены в [1,12]. Здесь мы обозначили

$$P(E_0, s, \lambda, \varkappa, \zeta) = \int\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}\, d\theta \int_0^{\infty} dt \int_0^{E_\theta} dE\, E^s \exp[-\lambda t + i(\varkappa\mathbf{r}) + i(\zeta\theta)] \times$$

$$\times P(E_0, E, t, \mathbf{r}, \bar{\theta}). \tag{5}$$

Аналогично и для функции Γ.

Функции $f_{1,2}$ являются образами функций P, Γ при $t=0$. Функцию пространственного распределения электронов определим в следующем виде:

$$P(E_0, E, t, r) = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, P(E_0, E, t, r\theta). \tag{6}$$

Полагая в (5) $\xi=0$, получим преобразование для функции пространственного распределения. Общая его, получим

$$P(E_0, s, \lambda, r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varkappa e^{(-\varkappa r)} P(E_0, s, \lambda, \varkappa, \zeta = 0). \tag{7}$$

В дальнейшем будем вычислять только функцию пространственного распределения и полагать $\zeta_i=0$, поэтому мы можем считать векторы $\varkappa$, ζ коллинеарными и в уравнениях (3), (4) в члене $\bar{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\zeta}$ заменить их на скаляры. Умножим (3) на оператор $\left(\lambda+\sigma_0-\varkappa\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)$ и подставим (4) в (3):

$$\left[\left(\lambda+\sigma_0-\varkappa\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\left(\lambda-\varkappa\frac{\partial}{\partial\zeta}+A(s)\right)-B(s)C(s)\right]P(E_0, s, \lambda, \varkappa, \zeta) =$$

$$=\left(\lambda+\sigma_0-\varkappa\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\left[-\frac{E_k^2\zeta^2}{4}P(E_0, s-2, \lambda, \varkappa, \zeta)+f_1(E_0, s, \varkappa, \zeta)\right]+$$

$$+B(s)f_2(E_0, s, \varkappa, \zeta). \tag{8}$$

Предположим, что частицы падают на границу вещества по вертикали, т. е. граничные условия зависят от θ в виде дельта функций, тогда $f_{1,2}$ не будут зависеть от ζ. Из (8) следует

$$\left(\lambda-\lambda_1(s)-\varkappa\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\left(\lambda-\lambda_2(s)-\varkappa\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)P(E_0, s, \lambda, \varkappa, \zeta) =$$

$$=\left(\lambda+\sigma_0-\varkappa\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\left[-\frac{E_k^2\zeta^2}{4}P(E_0, s-2, \lambda, \varkappa, \zeta)\right]+$$

$$+(\lambda+\sigma_0)\,\Phi(E_0, s, \lambda, \varkappa), \tag{9}$$

$$\Phi(E_0, s, \lambda, \varkappa) = f_1(E_0, s, \varkappa)+\frac{B(s)}{\lambda+\sigma_0}f_2(E_0, s, \varkappa). \tag{10}$$

Введем новую переменную $\xi=\zeta/\varkappa$. Решение уравнения (9) представим в следующем виде:

$$P(E_0, s, \lambda, \varkappa, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{E_k^2\varkappa^2}{4}\right)^n f(s, n, \lambda, \xi)\,\Phi(E_0, s-2n, \lambda, \varkappa) =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} dq\left(\frac{E_k\varkappa}{4}\right)^{2q}\Gamma(-q)\,\Gamma(q+1)\,f(s, q, \lambda, \xi)\,\Phi(E_0, s-2q, \lambda, \varkappa), \tag{11}$$

$$-1<\beta<0$$

Подставим (11) в (9) и приравняем члены с одинаковыми степенями $(-E_k^2\varkappa^2/4)$; тогда получим

$$\left[\lambda-\lambda_1(s)-\frac{\partial}{\partial\xi}\right]\left[\lambda-\lambda_2(s)-\frac{\partial}{\partial\xi}\right]f(s,0,\lambda,\xi)=\lambda+\sigma_0, \quad (12)$$

$$\left[\lambda-\lambda_1(s)-\frac{\partial}{\partial\xi}\right]\left[\lambda-\lambda_2(s)-\frac{\partial}{\partial\xi}\right]f(s,n,\lambda,\xi)=$$

$$=\left(\lambda+\sigma_0-\frac{\partial}{\partial\xi}\right)[\xi^2 f(s-2,n-1,\lambda,\xi)],\ n=1,2,\ldots \quad (13)$$

При отсутствии рассеяния, т. е. при $E_k=0$, мы получим одномерную задачу развития ливня. Ее решение рассмотрено, например, в [1]. При произвольных граничных условиях это решение имеет следующий вид:

$$P(E_0,s,\lambda)=\Phi(E_0,s,\lambda)/\Psi(s,\lambda). \quad (14)$$

Функция $\Psi(s,\lambda)$ определена в [1].

При $E_k=0$ из (11) и (14) следует

$$f(s,0,\lambda,\xi)=1/\Psi(s,\lambda). \quad (15)$$

Это решение удовлетворяет уравнению (12). Произведем в формуле (11) обратное преобразование Меллина по s в соответствии с (5). Переменную $s-2q$ под интегралом заменим на переменную s, получим

$$P(E_0,E,\lambda,\bar{\varkappa},\xi)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}ds\times$$

$$\times\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}dq\,E^{-s-1}\left(\frac{E_{\text{н}}\varkappa}{2E}\right)^{2q}\Gamma(-q)\,\Gamma(q+1)\,f(s+2q,q,\lambda,\xi)\times$$

$$\times\,\Phi(E_0,s,\lambda,\bar{\varkappa}),\ \alpha>0,\ -1<\beta<0,\ E\leqslant E_0. \quad (16)$$

Общее решение уравнения (13) можно записать в интегральной форме:

$$f(s+2n,n,\lambda,\xi)=-\sum_{i=1}^{2}H_i(s+2n)\exp\{[\lambda-\lambda_i(s+2n)]\,\xi\}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_0^{\xi}d\nu\exp\{-[\lambda-\lambda_i(s+2n)]\,\nu\}\,\nu^2 f(s+2n-2,n-1,\lambda,\nu)+C_{in}(s,\lambda)\right\}, \quad (17)$$

C_{in} — произвольные постоянные, которые выбираются при условии, что решение (17) не зависит от экспоненты $\exp\{[\lambda-\lambda_i(s+2n)]\,\xi\}$.

Используя начальное условие (15), получим по формуле (17) последовательные решения уравнения (13) для $n=1, 2, \ldots$ Методом индукции можно показать, что эти решения удовлетворяют уравнению

$$f(s+2n,n,\lambda,\xi)=\varphi_0(s,\lambda)\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}-\xi\right)^2 f(s+2n,n-1,\lambda,\xi)\quad n=1,2,\ldots \quad (18)$$

$$\varphi_m(s, \lambda) = \sum_{i=1}^{2} \frac{H_i(s)}{[\lambda - \lambda_i(s)]^{m+1}}. \tag{19}$$

Решение (18) можно представить в форме

$$f(s+2n, n, \lambda, \xi) = \sum_{m=0}^{2n} \xi^m a_m(s, n, \lambda). \tag{20}$$

Подставляя (20) в (17), получим систему конечно-разностных уравнений для $a_m(s, n, \lambda)$, которая приведена и решается в работе [11].

Введем следующую функцию:

$$G(s, z, \lambda, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} dq\, z^{2q}\, \Gamma(-q)\, \Gamma(q+1)\, f(s+2q, q, \lambda, \xi). \tag{21}$$

$$-1 < \beta < 0$$

Запишем уравнение (13) в форме, аналогичной (8), заменим s на $s+2q$ и представим функции $A(s+2q)$, $B(s+2q)$, $C(s+2q)$ их интегралами из [10]. Заменим под интегралом q^{-1} на q, перенесем контур интегрирования по q из точки β—1 в точку β и учтем полюс подынтегральной функции в точке $q=-1$. Решая уравнение (13), при $n=0$ получим

$$f(s-2, -1, \lambda, \xi) = \frac{1}{\xi^2}(1 + Ce^{(\lambda+\sigma_0)\xi}). \tag{22}$$

Экспоненциальное решение отбрасываем. В результате получим следующее уравнение для функции G:

$$\left(\lambda + \sigma_0 - \frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left\{\left(\lambda - \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi^2 z^2\right) G(s, z, \lambda, \xi) + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 dx\, \varphi_1(x) [g(s, z, \lambda, \xi) - (1-x)^s G(s, z(1-x), \lambda, \xi)]\right\} -$$

$$- 2 \int_0^1 \int_0^1 dx\, dy\, \varphi_1(x)\, \varphi_2(y)\, (xy)^s G(s, z, xy, \lambda, \xi) = \lambda + \sigma_0. \tag{23}$$

Потребуем

$$\lim_{\xi \to \infty} G(s, z, \lambda, \xi) = 0. \tag{24}$$

При этих условиях решение уравнения (23) можно записать в следующей форме:

$$G(s, z, \lambda, \xi) = \exp\left[\frac{\xi^3 z^2}{3} + \lambda\xi\right] \times$$

$$\times \int_{\infty}^{\xi} d\zeta \exp\left[-\frac{\zeta^3 z^2}{3} - \lambda\zeta\right] \left\{\int_0^1 dx\, \varphi_1(x) [G(s, z, \lambda, \zeta) -\right.$$

$$-(1-x)^s G(s, z(1-x), \lambda, \zeta)] - e^{(\lambda+\sigma_0)\zeta} \int_{\zeta}^{\infty} dv\, e^{-(\lambda+\sigma_0)v}\, 2 \iint_0^1 dxdy\,(xy)^s \times$$

$$\times \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)\,dxdy\,G(s, zxy, v) - 1 \Big\}. \qquad (25)$$

Функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ определены в [10]. Из (20), (21) следует, что функция $G(s, z, \lambda, \xi=0)$ выражается с помощью обратного преобразования Меллина через функцию $a_0(s, q, \lambda)$. Уравнение для последней получаем из (18), полагая $\xi=0$.

$$a_0(s, q, \lambda) = \varphi_0(s, \lambda) \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} a_0(s+2, q-1, \lambda),\ a_0(s, 0, \lambda) = \varphi_0(s, \lambda). \qquad (26)$$

Решение уравнения (26) для целых положительных $q=n$ представляет собой сумму экспонент $\exp[\lambda;\ (s+2m)t]$ (если перейти от переменной λ к переменной t, с помощью обратного преобразования Меллина по λ). Оставляя лишь первую экспоненту $e^{\lambda_i(s)t}$, что эквивалентно условию $\frac{E}{E_0} \ll 1$ (см. (16)), при $\xi=0$ получим

$$a_0(s, q, t) \simeq \sum_{i=1}^{2} H_i(s)\, M_{i0}(s, q) \exp[\lambda_i(s)\, t], \qquad (27)$$

$$M_{i0}(s, q) = \frac{\partial^2}{\partial\lambda_i^2(s)} [\varphi_0(s+2, \lambda_i(s))\, M_{i0}(s+2, q-1)],\ M_{i0}(s, 0) = 1. \qquad (28)$$

Функции $M_{ic}(s, n)$ для $n=1, 2, 3, 4$ вычислены в [11]. Можно указать приближенное решение уравнения (28). Сделаем замену

$$\varphi_0(s+2n, \lambda_i(s)) \simeq \frac{1}{\lambda_i(s) + A(s)},$$

тогда

$$M_{i0}(s, n) \simeq \frac{(3n)!}{3^n n!\,(\lambda_i(s) + A(s)^{2n}}. \qquad (29)$$

В этой формуле плохо отражена зависимость от s по сравнению с точными формулами для целых n. Полагая в (20), (21) и (25) $\xi=0$, можно показать, что $a_0(s, q, \lambda)$ имеет простые полюса в точках

$$q = -\frac{n+1}{3} - \frac{s}{2} + k,\ n, k = 0, 1, \ldots .$$

Поэтому более точной является следующая аппроксимация для функции M_{i0}:

$$M_{i0}(s, q) \simeq T_{i0}(s, q) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}s+1\right)} \frac{\Gamma\left(3q+\frac{3}{2}s+1\right)}{5^q\,\Gamma(q+2)\,[\lambda_i(s)+A(s)]^{3q}}. \qquad (30)$$

Интеграл по q в (21) может быть вычислен, если полагать $\xi=0$ и использовать (27), (30). Выберем граничные условия в виде единичного электрона, падающего по вертикали на границу вещества в точке $\bar{r}_0$.

Тогда для числа электронов с энергией больше E после интегрирования по E в (16) и по $\bar{\varkappa}$ в (7) получим

$$N_p(E_0, E, t, \rho) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} ds \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \left(\frac{E}{E_k}\right)^2 \sum_{j=1}^{2} H_i(s) F_j(s, z) e^{\lambda_j(s)t}, \quad (31)$$

$$F_j(s, z) = \frac{5}{2\pi} \frac{[\lambda_j(s) + A(s)]^3}{\Gamma\left(\frac{3}{2}s+1\right)} z^{\frac{s}{2}-1} \int\limits_0^\infty dx\, e^{-\left(\frac{z}{x}\right)^{1/3}} x^{-\frac{s}{2}} \int\limits_x^\infty \frac{dt}{t} e^{-t},$$

$$z = 5\,[\lambda_j(s) + A(s)]^3 \left(\frac{E\rho}{E_k}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{E\rho}{E_k}\right)^{s-2} f_j(s, z), \quad (32)$$

$$\rho = |\bar{r} - \bar{r}_0|.$$

В (31) можно полагать $E=0$, тогда получим число частиц с энергией больше 0, выражающееся через функцию $f_i(s, 0)$. Той же формулой с функцией $f_i(s, 0)$ выражается так называемое «осевое приближение» для функции N_p, справедливое при малых величинах ρ. Оно не зависит от энергии E:

$$f_i(s, 0) = \frac{5^{s/2}\,[\lambda_i(s) + A(s)]^{\frac{3}{2}s}\,\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{2\pi\,\Gamma\left(\frac{3}{2}s+1\right)\left(1-\frac{s}{2}\right)}. \quad (33)$$

Число электронов в круге радиуса R получим, интегрируя (31) по ρ. После вычисления интеграла получим

$$N_p(E_0, E, t, <R) = \left(\frac{E_0}{E}\right)^s H_1(s)\,\Phi_1(s, \nu)\, e^{\lambda_1(s)t} \times$$

$$\times \left[2\pi\left(\lambda_1''(s)\,t + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\ln\Phi_1(s, \nu)\right)\right]^{-1/2},$$

$$\Phi_1(s, \nu) = \frac{\nu^{s/2}}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}s+1\right)} \int\limits_0^\infty dx\, e^{-\left(\frac{\nu}{x}\right)^{1/3}} x^{-\frac{s}{2}} \times \quad (34)$$

$$\times \left[\int\limits_x^\infty \frac{dt}{t} e^{-t} - \frac{e^{-x}}{x}\right] + \frac{1}{s},$$

$$\nu = 5\,[\lambda_1(s) + A(s)]^3 \frac{E^2 R^2}{E_k^2}.$$

$$t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)}\left[\ln\frac{E_0}{E} + \frac{\partial}{\partial s}\ln\Phi(s, \nu)\right].$$

В осевом приближении, справедливом до $\frac{ER}{E_k} < 10^{-2}$, получаем следующее выражение для числа электронов в круге радиуса R:

$$N_p(E_0, E, t, <R)_{\text{ос}} = \left(\frac{E_0 R}{E_k}\right)^s \frac{H_1(s)}{s} f_1(s, 0) \times$$

$$\times 2\pi e^{\lambda_1(s)t} \left[2\pi \left(\lambda_1''(s)\, t + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln \frac{f_1(s, 0)}{s}\right)\right]^{-1/2},$$

$$t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \left[\ln \frac{E_0 R}{E_k} + \frac{\partial}{\partial s} \ln \frac{f_1(s, 0)}{s}\right].$$

Таблица 1

Численные значения функции $f_1(s, z)$, вычисленной по формуле (32)

s \ $E\rho/E_k$	0	10^{-3}	0,00316	10^{-2}	0,0316	0,1	0,316	1,0	3,16	10
0,5	0,552	0,514	0,477	0,412	0,311	0,185	0,0728	0,0140	$7{,}86\cdot10^{-4}$	$3{,}65\cdot10^{-6}$
1,0	0,968	0,872	0,795	0,672	0,501	0,303	0,130	0,0311	$2{,}83\cdot10^{-3}$	$4{,}13\cdot10^{-5}$
1,5	2,77	1,90	1,57	1,18	0,768	0,401	0,148	0,0313	$2{,}58\cdot10^{-3}$	$3{,}86\cdot10^{-5}$
2,0	∞	8,02	5,14	2,97	1,49	0,594	0,167	0,0266	$1{,}60\cdot10^{-3}$	$1{,}69\cdot10^{-9}$

Таблица 2

Функция $f_1(s, o)$, рассчитанная по формуле (33)

s	$f_1(s, o)$	Результат из [8]	s	$f_1(s, o)$	Результат из [8]
0	0,1592		1,1	1,112	
0,1	0,2402		1,2	1,312	
0,2	0,3239		1,3	1,599	
0,3	0,4047		1,4	2,040	1,8
0,4	0,4805				
0,5	0,5524				
0,6	0,6216	0,63	1,5	2,769	
			1,6	4,102	
			1,7	6,968	
0,7	0,6923		1,8	15,08	
0,8	0,7700		1,9	58,48	
0,9	0,8581		2,0	∞	∞
1,0	0,9683	1,01			

Таблица 3

Численные значения функции $\Phi_1(s, v)$, вычисленные по формуле (34)

s	ER/E_k								
	10^{-3}	0,00316	10^{-2}	0,0316	0,1	0,316	1,0	3,16	10
0,5	0,742	0,748	0,791	0,983	1,38	1,76	1,95	2,0	2,0
1,0	0,106	0,107	0,114	0,150	0,292	0,557	0,832	0,975	0,999
1,5	0,0121	0,0124	0,0144	0,0269	0,0811	0,221	0,442	0,617	0,664
2,0	0,00142	0,00152	0,00225	0,00703	0,0304	0,109	0,272	0,440	0,492

Численные значения функций $f_1(s, z)$, $\Phi_1(s, v)$ даны в таблицах 1, 2 и 3. Из табл. 2 следует, что в осевом приближении наши результаты хорошо совпадают с результатами из [8]. Для сравнения табл. 1 с той же из [8] следует функцию $f_1(s, z)$ умножить на s или результаты из [8] разделить на s, так как функция в [8] нормирована на 1, а наша функция на $\frac{1}{s}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беленький С. З. Лавинные процессы в космических лучах. М., 1948.
2. Robery J., Nordheim C. W. «Phys. Rev.», **75**, 444, 1949.
3. Eygesl., Fernbach S. «Phys. Rev.», **82**, 23, 1951.
4. Green H. S., Messel H. «Phys. Rev.», **88**, 331, 1952.
5. Green H. S., Bergman O. «Phys. Rev.», **95**, 516, 1954.
6. Moliere G. Vortrage uber Kosmis he Strahlung (Hrsg. von Heisenberg W.) Berlin, Springer—Verlag, 1953.
7. Гужавин В. В., Иваненко И. П. ДАН СССР, **115**, 1089, 1957.
8. Nishimura J., Kamata K. «Suppl. Progr. Theor. Phys.», **6**, 93—155, 1958.
9. Гужавин В. В. и др. «Ядерная физика», **15**, вып. 3, 500, 1972.
10. Бахтадзе А. К. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., **13**, № 5, 516, 1972.
11. Бахтадзе А. К. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 4, 39, 1967.
12. Бахтадзе А. К., Иваненко И. П. «Ядерная физика», **4**, вып. 1, 161, 1966.

Поступила в редакцию
23.10 1974 г.

НИИЯФ