Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1—1976

УДК 53:519.25

Н. Н. БОГОЛЮБОВ (мл.), В. Н. ПЛЕЧКО

О МОДЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ СО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ОТТАЛКИВАНИЯ

Рассмотрена многочастичная модельная задача с четырехфермионным положительным взаимодействием и источниками. Получены асимптотически точные выражения для свободной энергии и многовременных корреляционных функций. Показано, что в термодинамическом пределе роль взаимодействия сводится к перенормировке (ослаблению) источников.

Реальные системы многих частиц, как известно, весьма сложны и плохо поддаются теоретическому описанию. Поэтому в современной квантовой статистической физике вместо реальной задачи изучают обычно ее упрощенную модель, учитывающую лишь основные физические свойства исходной системы. Однако даже и такие упрощенные модели далеко не всегда допускают точное решение, и для их исследования приходится применять методы, обладающие малой математической строгостью. При таком положении вещей несомненный интерес представляет каждая новая точно решаемая модельная задача. Исследуя такие задачи, можно быть уверенным, что полученные результаты отражают свойства самой модели и не искажены ошибками приближенного расчета.

Следует отметить, что физически важными являются только асимптотические (в смысле термодинамического предельного перехода[1]) характеристики модельной системы. В последнее время были разработаны специальные математические методы, позволяющие получить асимптотически точное решение для широкого круга задач, не поддающихся непосредственному решению. Эти методы основаны на замене исходного модельного гамильтониана, определяющего термодинамику изучаемой системы, так называемым аппроксимирующим гамильтонианом, имеющим более простую структуру, и доказательстве их термодинамической эквивалентности. Метод аппроксимирующих гамильтонианов, развитый первоначально для задач теории сверхпроводимости [1—2], применялся затем в теории магнетизма [3—5], при рассмотрении некоторых классов модельных систем [6—7] и в других задачах. В частности, в работах одного из авторов [8] были рассмотрены свойства фермионного газа с отталкиванием между куперовски-

[1] При $N\to\infty$, $V\to\infty$, $V/N=\mathrm{const}$, где N — число частиц в системе, а V — ее объем.

ми парами фермионов. Гамильтониан этой модели имеет вид (в представлении вторичного квантования):

$$H = \sum_f T_f a_f^+ a_f + \frac{g}{2V} \sum_{ff'} \overset{*}{\lambda}_f \lambda_{f'} a_f^+ a_{-f}^+ a_{-f'} a_{f'}. \tag{1}$$

Как показано в работах [8], при любой температуре в пределе $V \to \infty$ взаимодействие (второе слагаемое в правой части (1)) несущественно, т. е. в термодинамическом пределе модель (1) описывает идеальный газ фермионов.

В настоящей работе изучается более общая задача, допускающая асимптотически точное решение, когда в гамильтониан типа (1) введены квадратичные по ферми-операторам члены — так называемые источники:

$$H = \sum_f T_f a_f^+ a_f + \frac{g}{2V} \sum_{ff'} \sum_{\alpha=1}^{s} \overset{*}{\lambda}_\alpha(f) \lambda_\alpha(f') a_f^+ a_{-f}^+ a_{-f'} a_{f'} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_f \sum_{\alpha=1}^{s} (\overset{*}{\nu}_\alpha \overset{*}{\lambda}_\alpha(f) a_f^+ a_{-f}^+ + \nu_\alpha \lambda_\alpha(f) a_{-f} a_f). \tag{2}$$

Как обычно, система предполагается заключенной в «кубический ящик» объема $V = L^3$ (при переходе к термодинамическому пределу $L \to \infty$). Здесь $f = (\mathbf{p}, \sigma)$, $-f = (-\mathbf{p}, -\sigma)$, где проекции импульса $\mathbf{p}$ принимают свои обычные квантовые значения:

$$p_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \quad p_y = \frac{2\pi}{L} n_y, \quad p_z = \frac{2\pi}{L} n_z;$$

n_x, n_y, n_z — целые числа, σ — спиновой индекс, принимающий два значения $\pm\frac{1}{2}$; $T_f = \frac{p^2}{2M} - \mu$, M — масса частицы, μ — химический потенциал, g — положительный параметр взаимодействия, $g \geqslant 0$; a_f^+, a_f — ферми-операторы рождения и уничтожения фермионов в состоянии f; ν_α и $\overset{*}{\nu}_\alpha$ — комплексные параметры, вводящие источники; $\lambda_\alpha(f)$ — параметры взаимодействия, обладающие свойствами:

$$\lambda_\alpha(f) = -\lambda_\alpha(-f), \tag{3}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{s} |\lambda_\alpha(f)| \leqslant K_1 \text{ для всех } f; \tag{4}$$

$$\lambda_\alpha(f) = 0 \tag{5}$$

вне некоторой ограниченной области импульсного пространства вокруг поверхности Ферми.

Последнее условие обеспечивает ограниченность следующих величин:

$$\frac{1}{2V} \sum_f \sum_{\alpha=1}^{s} |\lambda_\alpha(f)| \leqslant K_2, \tag{6}$$

$$\frac{1}{V} \sum_f \left(\sum_{\alpha=1}^{s} |\lambda_\alpha(f)| \right)^2 \leqslant K_3. \tag{7}$$

В правой части выражения (2) первый член соответствует идеальному ферми-газу, второй член описывает отталкивание куперовских пар, и, наконец, последнее слагаемое в (2) (источники) введено в гамильтониан для сообщения модели сверхпроводящих свойств. Гамильтониан (2) при $g=0$ описывает идеальный газ квазичастиц со щелью в спектре элементарных возбуждений, что и обеспечивает свойство сверхпроводимости. В настоящей работе изучено влияние положительного взаимодействия на сверхпроводимость. Оказывается, что взаимодействие приводит к ослаблению источников, и следовательно, к ухудшению сверхпроводящих свойств модели. Физически источники можно интерпретировать как своего рода «внешнее поле», способствующее образованию куперовских пар. Подробнее мы обсудим физический смысл рассматриваемой модели и полученных результатов в конце изложения.

Введем обозначения

$$T = \sum_f T_f a_f^+ a_f, \quad S_\alpha = \frac{1}{2V} \sum_f \overset{*}{\lambda}_\alpha (f) a_f^+ a_{-f}^+,$$

и перепишем гамильтониан (2) в виде

$$H = T + 2Vg \sum_{\alpha=1}^{s} S_\alpha \overset{+}{S}_\alpha + V \sum_{\alpha=1}^{s} (\nu_\alpha \overset{+}{S}_\alpha + \overset{*}{\nu}_\alpha S_\alpha). \tag{8}$$

Представим теперь H как сумму аппроксимирующего $H_0(C)$ и остаточного $H_1(C)$ гамильтонианов: $H \equiv H_0(C) + H_1(C)$, где

$$H_1(C) = 2Vg \sum_{\alpha=1}^{s} (S_\alpha - C_\alpha)(\overset{+}{S}_\alpha - \overset{*}{C}_\alpha),$$

$$H_0(C) = T + V \sum_{\alpha=1}^{s} [(\nu_\alpha + 2gC_\alpha)\overset{+}{S}_\alpha + (\overset{*}{\nu}_\alpha + 2g\overset{*}{C}_\alpha) S_\alpha] - 2Vg \sum_{\alpha=1}^{s} C_\alpha \overset{*}{C}_\alpha, \tag{9}$$

здесь C_α, $\overset{*}{C}_\alpha$ — пока произвольные числовые комплексные параметры. Воспользуемся далее следующим фундаментальным неравенством (доказательство см., например, в [1, 2] [1])

$$0 \leqslant f[H] - f[H_0(C)] \leqslant \frac{1}{N} \langle H_1(C) \rangle_{H_0(C)}. \tag{10}$$

Очевидно наилучшей аппроксимации в (10) можно достичь, выбрав параметры $C_\alpha = \bar{C}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3, \ldots, s)$, где $\bar{C}_\alpha$ реализуют абсолютный максимум ограниченной сверху функции $f[H_0(C)]$ [2]. Для определения $\bar{C}_\alpha$ получается следующая система уравнений:

[1] Свободная энергия $f[\mathscr{H}]$ и средние по ансамблю $\langle \ldots \rangle_{\mathscr{H}}$ для системы, описываемой гамильтонианом $\mathscr{H} = \overset{+}{\mathscr{H}}$ и пребывающей в состоянии термодинамического равновесия при температуре θ (в энергетических единицах), определяются известными формулами

$$f[\mathscr{H}] = -\frac{\theta}{V} \ln Tr e^{-\mathscr{H}/\theta}, \quad \langle \ldots \rangle_{\mathscr{H}} = Tr(\ldots e^{-\mathscr{H}/\theta})/Tr e^{-\mathscr{H}/\theta}.$$

[2] Используя условие (6), нетрудно получить

$$f[H_0(C)] \leqslant f[H] \leqslant f[T] + 2g(K_2)^2 + 2K_2 \sum_{\alpha=1}^{s} |\nu_\alpha|.$$

$$C_\alpha = \langle S_\alpha \rangle_{H_0(C)} \quad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots, s). \tag{11}$$

Ниже мы докажем единственность решения этой системы. Полагая в (10) $C_\alpha = \overline{C}_\alpha$, применяя для вычисления величины, стоящей в правой части неравенства (10) теорему Вика—Блоха—Де Доминициса [9] и используя условия (3), (7), после небольших вычислений находим

$$0 \leqslant f[H] - f[H_0(\overline{C})] \leqslant g\frac{K_3}{V}. \tag{12}$$

Тем самым доказана асимптотическая близость плотностей свободных энергий $f[H]$ и $f[H_0(\overline{C})]$, причем $f[H_0(\overline{C})]$ легко вычисляется (см. (32)). Отметим, что мажорационная оценка в (12) не зависит от параметров ν_α, ν^*_α вводящих источники.

Рассмотрим систему уравнений (11). Удобно ввести обозначения

$$z_\alpha = \nu_\alpha + 2gC_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots, s) \tag{13}$$

и, используя явное выражение для $\langle S_\alpha \rangle_{H_0(C)}$ (см. (33)), представить (11) как уравнения для определения $\overline{z}_\alpha = \nu_\alpha + 2g\overline{C}_\alpha$:

$$z_\alpha + \frac{g}{V}\sum_f \frac{\operatorname{th}(E_f/2\theta)}{2E_f}\sum_{\beta=1}^{s} \overset{*}{\lambda}_\alpha(f)\,\lambda_\beta(f)\,z_\beta = \nu_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots, s), \tag{14}$$

здесь

$$E_f = \left(T_f^2 + \left|\sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha(f)\,z_\alpha\right|^2\right)^{1/2}.$$

Поскольку E_f зависят от z_α, система уравнений (14) нелинейна. Покажем, что она имеет единственное решение. Доказательство единственности избавляет нас от необходимости давать рецепт выбора нужной ветви решения, если бы их было несколько.

Для дальнейшего удобно ввести обозначения:

$$Z_f = \left|\sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha(f)\,z_\alpha\right|, \quad \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha(f)\,z^\alpha = Z_f e^{i\varphi_f},$$

$$A_f \equiv A_f(Z_f) = \frac{g}{V}\,\frac{\operatorname{th}\left(\sqrt{T_f^2 + Z_f^2}/2\theta\right)}{2\sqrt{T_f^2 + Z_f^2}}, \tag{15}$$

в которых система уравнений (14) имеет вид

$$z_\alpha + \sum_f \overset{*}{\lambda}_\alpha(f) \quad A_f(Z_f)\,Z_f e^{i\varphi_f} = \nu_\alpha. \tag{16}$$

Предположим, что уравнения (16) допускают два набора решений $\overline{z}_\alpha$ и $\widetilde{z}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3, \ldots, s)$. Тогда из (16) следует

$$(\overline{z}_\alpha - \widetilde{z}_\alpha) + \sum_f \overset{*}{\lambda}_\alpha(f)\,[A_f(\overline{Z}_f)\,\overline{Z}_f \cdot e^{i\overline{\varphi}_f} - A_f(\widetilde{Z}_f)\,\widetilde{Z}_f \cdot e^{i\widetilde{\varphi}_f}] = 0.$$

Домножая обе части этого равенства на $(\overset{*}{\bar{z}}_\alpha - \overset{*}{\tilde{z}}_\alpha)$ и суммируя по α, находим

$$\sum_{\alpha=1}^{s} |\bar{z}_\alpha - \tilde{z}_\alpha|^2 + \sum_f [A_f(\bar{Z}_f)\bar{Z}_f e^{i\bar{\varphi}_f} - A_f(\tilde{Z}_f)\tilde{Z}_f e^{i\tilde{\varphi}_f}](\bar{Z}_f e^{-i\bar{\varphi}_f} - \tilde{Z}_f e^{-i\tilde{\varphi}_f}) \equiv 0. \quad (17)$$

Действительная часть тождества (17) может быть представлена в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{s} |\bar{z}_\alpha - \tilde{z}_\alpha|^2 + \sum_f \Big[\frac{A_f(\bar{Z}_f)\bar{Z}_f - A_f(\tilde{Z}_f)\tilde{Z}_f}{\bar{Z}_f - \tilde{Z}_f} (\bar{Z}_f - \tilde{Z}_f)^2 +$$

$$+ \bar{Z}_f \tilde{Z}_f (\bar{A}_f + \tilde{A}_f)(1 - \cos(\bar{\varphi}_f - \tilde{\varphi}_f)) \Big] \equiv 0. \quad (18)$$

С другой стороны, как не трудно убедиться,

$$\frac{d}{dZ_f}[A_f(Z_f)Z_f] \geqslant 0,$$

и, следовательно,

$$\frac{A_f(\bar{Z}_f)\bar{Z}_f - A_f(\tilde{Z}_f)\tilde{Z}_f}{\bar{Z}_f - \tilde{Z}_f} \geqslant 0$$

при любых $\bar{Z}_f$ и $\tilde{Z}_f$. Поэтому второе слагаемое (сумма по f) в левой части (18) неотрицательно и, следовательно,

$$\sum_{\alpha=1}^{s} |\bar{z}_\alpha - \tilde{z}_\alpha|^2 \leqslant 0,$$

что возможно только при $\bar{z}_\alpha = \tilde{z}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3, \ldots, s)$. Таким образом, система уравнений (14), (16) имеет единственное решение.

Этим единственным решением системы (14), (16) в случае отсутствия источников ($\nu_\alpha = 0$) является, очевидно, тривиальное решение $\bar{z}_\alpha = C_\alpha = 0$ для всех α. Следовательно, аппроксимирующим здесь является гамильтониан идеального газа. Для случая $s = 1$ этот результат был получен в работах [8] (причем источники не вводились с самого начала).

Получим ряд ограничений на параметры $\bar{z}_\alpha$. Домножая обе части (14) на $\overset{*}{\bar{z}}_\alpha$ и суммируя по α, имеем

$$\sum_{\alpha=1}^{s} |\bar{z}_\alpha|^2 + \frac{g}{V} \sum_f \frac{\operatorname{th}(E_f/2\theta)}{2E_f} \Big| \sum_{\beta=1}^{s} \lambda_\beta(f) \bar{z}_\beta \Big|^2 \quad \sum_{\alpha=1}^{s} \overset{*}{\bar{z}}_\alpha \nu_\alpha. \quad (19)$$

Непосредственно из (19) вытекает неравенство

$$\sum_{\alpha=1}^{s} |\bar{z}_\alpha|^2 \leqslant \sum_{\alpha=1}^{s} |\nu_\alpha|^2, \quad (20)$$

а также следующее свойство:

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \bar{z}_\alpha \overset{*}{\nu}_\alpha = [\text{вещественное число}] \geqslant \sum_{\alpha=1}^{s} |\bar{z}_\alpha|^2 \geqslant 0. \quad (21)$$

Из дополнительного условия (6) и соотношений (11) следует: $\sum_{\alpha=1}^{s}|\bar{C}_\alpha| \leqslant K_2$. Используя это неравенство, определение (13) и свойства (20), (21), нетрудно получить

$$\sum_{\alpha=1}^{s} |\bar{C}_\alpha|^2 \leqslant \min\left\{(K_2)^2, \frac{\sum_{\alpha=1}^{s} |\nu_\alpha|^2}{4g^2}\right\}, \tag{22}$$

$$\max\left\{0, \sum_{\alpha=1}^{s} |\nu_\alpha|^2 - 4g^2(K_2)^2\right\} \leqslant \sum_{\alpha=1}^{s} |\bar{z}_\alpha|^2 \leqslant \sum_{\alpha=1}^{s} |\nu_\alpha|^2. \tag{23}$$

Остановимся несколько подробнее на случае сепарабельного ядра взаимодействия $s=1$. Соотношения (20), (21) означают тогда, что комплексные числа $\bar{z}$ и ν имеют одинаковую фазу, а фаза числа $\bar{C}$ отличается от фазы чисел $\bar{z}$ и ν на π. Следовательно, $|\bar{z}| = |\nu| - 2g|\bar{C}|$. Вместо (23) имеем

$$\max\{0, |\nu| - 2gK_2\} \leqslant |\bar{z}| \leqslant |\nu|. \tag{24}$$

Для определения $|\bar{z}|$ остается уравнение

$$[1 + g\Phi(|z|)]\,|z| = |\nu|, \tag{25}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{V}\sum_f \frac{|\lambda(f)|^2 \operatorname{th}[(T_f^2 + |\lambda(f)|^2 x^2)^{1/2}/2\theta]}{2(T_f^2 + |\lambda(f)|^2 x^2)^{1/2}}.$$

Нетрудно проверить, что при $x \geqslant 0$ $d\Phi/dx \leqslant 0$, откуда, с учетом (24) находим

$$\Phi(0) \geqslant \Phi(|z|) \geqslant \Phi(|\nu|) > 0. \tag{26}$$

Неравенства (26) позволяют улучшить оценку (24) для решения уравнения (25):

$$\max\left\{\frac{|\nu|}{1+g\Phi(0)}, \ |\nu| - 2gK_2\right\} \leqslant |\bar{z}| \leqslant \frac{|\nu|}{1+g\Phi(|\nu|)}. \tag{27}$$

Физический смысл неравенств типа (22), (23) обсуждается ниже. Здесь мы только заметим, что, как это видно из (2), (9), (23), (27), роль положительного взаимодействия в гамильтониане (2) сводится в пределе $V\to\infty$ к ослаблению источников (в смысле неравенств (23), (27)). Следует отметить, что свойство ослабления источников является весьма общим для задач с положительным взаимодействием и, как показано в работе [7], справедливо для целого класса модельных задач, в который входит и рассматриваемая модель при $s=1$.

Для завершения доказательства термодинамической эквивалентности гамильтонианов H и $H_0(\bar{C})$ необходимо доказать, что многовременные корреляционные функции и функции Грина для модели (2) могут быть вычислены асимптотически точно с помощью аппроксимирующего гамильтониана $H_0(\bar{C})$ (9). Метод доказательства в основном аналогичен применяемому при исследовании моделей типа БКШ [2] и основан на анализе уравнений движения для ферми-амплитуд α_f, $\overset{+}{\alpha}_f$

(см. (30)). Ввиду громоздкости соответствующих выкладок мы ограничимся лишь окончательным результатом:

$$
\begin{aligned}
&|\langle \overset{+}{\alpha}_{f_1}(t_1) \ldots \overset{+}{\alpha}_{f_i}(t_i)\, \alpha_{f_{i+1}}(t_{i+1}) \ldots \alpha_{f_n}(t_n)\rangle_H - \langle \overset{+}{\alpha}{}^0_{f_1}(t_1) \ldots \overset{+}{\alpha}{}^0_{f_i}(t_i) \times \\
&\times \alpha^0_{f_{i+1}}(t_{i+1}) \ldots \alpha^0_{f_n}(t_n)\rangle_{H_0(\bar{C})}| \leqslant \frac{11 \cdot Q^{1/2}}{\theta^{1/2} \cdot V^{1/4}} + \left(\frac{Q}{V^{1/2}} + \right. \\
&\left. + \frac{4gK_1^2(n-1)}{V}\right)\left(\sum_{j=1}^{n-1} j\,|t_j - t_{j+1}|\right), \qquad Q = 4gK_1\sqrt{K_3},
\end{aligned} \tag{28}
$$

где

$$\overset{+}{\alpha}_f(t), \quad \alpha_f(t) = e^{iHt}\overset{+}{\alpha}_f, \quad \alpha_f \cdot e^{-iHt}, \quad \overset{+}{\alpha}{}^0_f(t) = e^{iE_f t} \cdot \overset{+}{\alpha}{}^0_f, \quad \alpha^0_f(t) = e^{-iE_f t} \cdot \alpha^0_f.$$

Следует отметить, что межорационная оценка в (28) не зависит от величины источников (от параметров ν_α).

Заметим, что корреляционные средние и функции Грина, построенные из операторов a_f^+ и a_f, линейно выражаются через средние от нормальных произведений α-операторов. Следовательно, в пределе $V \to \infty$ многовременные корреляционные функции и функции Грина модели [2] совпадают с соответствующими величинами, построенными на основе $H_0(\bar{C})$, которые в свою очередь после перехода к α-операторам и использования теоремы Вика — Блоха — Де Доминициса [9] легко вычисляются в явном виде.

Рассмотренная выше задача представляет интерес с нескольких точек зрения. Например, полученные результаты позволяют проследить влияние отталкивания пар частиц на сверхпроводящие свойства системы. Ограничимся случаем $s=1$ для модели (2), тогда правое неравенство в (24) означает в соответствии с формулой (31), что наличие положительного взаимодействия в гамильтониане задачи приводит к уменьшению щели в спектре исходной модели (гамильтониан (2) при $g=0$), т. е. к ухудшению сверхпроводящих свойств системы. Но при этом сверхпроводимость все же сохраняется при любой конечной величине g и при любой температуре. Левая часть неравенства (27) дает оценку снизу для величины щели[1]. Полученные результаты могут оказаться полезными и в теории ядра, поскольку есть веские основания предполагать, что структура ядерной материи подобна электронной структуре металлов [10].

Кроме того, рассмотренная задача представляет и методический интерес. Разработанная техника может оказаться полезной при исследовании других задач с положительным взаимодействием и источниками, описываемыми гамильтонианами вида (8), где операторы T, S_α и $\overset{+}{S}_\alpha$ имеют уже другой конкретный смысл, например, при исследовании моделей магнитных веществ с положительным взаимодействием гейзенберговского типа $g\mathbf{S}^2$. Заметим, кстати, что в моделях магнетиков роль источников играют члены, описывающие действие

[1] Основная модель теории сверхпроводимости — модель БКШ — Боголюбова — описывается, как известно, гамильтонианом вида (1) при $g=-g_1<0$. Добавление положительного взаимодействия $2V_{g_2}SS^+$ означает перенормировку константы $g_1 \to g_1 - g_2$ и приводит при $0<g_2<g_1$ к ухудшению сверхпроводящих свойств, а при $g_2>g_1$ результирующее взаимодействие становится положительным и сверхпроводимость исчезает вовсе. В этом смысле модель (2) при $g=0$ обладает более «прочной» сверхпроводимостью, чем модель БКШ — Боголюбова.

внешнего магнитного поля, а свойства типа «ослабления источников» (23), (27) приводят в конечном итоге к уменьшению намагниченности системы. Знание такого рода качественных результатов (следствий от добавления в гамильтониан положительного взаимодействия) может оказаться полезным при конструировании более сложных модельных гамильтонианов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Диагонализация аппроксимирующего гамильтониана. Аппроксимирующий гамильтониан $H_0(C)$ (9) является квадратичной формой по ферми-операторам и может быть приведен к диагональному виду

$$H_0(C)=\sum_f E_f\overset{+}{\alpha}_f\alpha_f+V\mathscr{K}, \tag{29}$$

где новые ферми-амплитуды $\overset{+}{\alpha}_f$ и α_f определяются каноническим преобразованием Н. Н. Боголюбова [11]:

$$\alpha_f=u_f a_f+v_f\overset{+}{a}_{-f},\quad \overset{+}{\alpha}_f=u_f\overset{+}{a}_f+\overset{*}{v}_f a_{-f}, \tag{30}$$

здесь

$$u_f=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{T_f}{E_f}\right)},\quad v_f=\frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{s}\lambda_\alpha(f)z_\alpha}{\left|\sum\limits_{\alpha=1}^{s}\lambda_\alpha(f)z_\alpha\right|}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{T_f}{E_f}\right)};$$

$$E_f=\left(T_f^2+\left|\sum_{\alpha=1}^{s}\lambda_\alpha(f)z_\alpha\right|^2\right)^{1/2},\quad z_\alpha=\nu_\alpha+2gC_\alpha; \tag{31}$$

$$\mathscr{K}=-2g\sum_{\alpha=1}^{s}|C_\alpha|^2-\frac{1}{2V}\sum_f(E_f-T_f).$$

Нетрудно проверить, что $\alpha_f\overset{+}{\alpha}_g+\overset{+}{\alpha}_g\alpha_f=\delta_{fg}$, т. е. $\overset{+}{\alpha}_f$, α_f являются ферми-операторами. Таким образом, гамильтониан (9) и (29) описывает идеальный газ квазичастиц (фермионов) и для него могут быть без труда вычислены свободная энергия

$$f[H_0(C)]=-\frac{\theta}{V}\sum_f\ln\left(1+e^{-\frac{E_f}{\theta}}\right)+\mathscr{K} \tag{32}$$

и корреляционные средние. При вычислении средних от операторов $\overset{+}{a}_f$, a_f необходимо перейти к α-операторам (с помощью преобразования обратного (30)) и использовать теорему Вика — Блоха — Де Доминициса [9]. Нетрудно, например, получить:

$$\langle S_\alpha\rangle_{H_0(C)}=-\frac{1}{2V}\sum_f\frac{\operatorname{th}E_f/2\theta}{2E_f}\sum_{\beta=1}^{s}\overset{*}{\lambda}_\alpha(f)\lambda_\beta(f)(\nu_\beta+2gC_\beta). \tag{33}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Bogolubov N. N. (jr.). «Physica», 32, 933, 1966.
2. Боголюбов Н. Н. (мл.). Препринт ОИЯИ, Р4-4184. Дубна, 1968; Метод исследования модельных гамильтонианов. М., 1974.

3. Бранков И. Г. Сообщения ОИЯИ, Р4-6998, Р4-7000. Дубна, 1973.
4. Brankov J. G., Shumovsky A. S., Zagrebnov V. A. «Physica», 78, 183, 1974.
5. Лапушкин С. С., Плечко В. Н. Препринт ИТФ-73-149Р. Киев, 1973.
6. Bogolubov N. N., (jr.), Plechko V. N. Preprint ICTP IC/75/68. Trieste, 1975.
7. Боголюбов Н. Н. (мл.), Плечко В. Н. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., 16, № 3, 1975.
8. Боголюбов Н. Н. (мл.). Препринты ИТФ-68-65, ИТФ-68-67. Киев, 1968.
9. Bloch C., De Dominicis C. «Nucl. Phys.», 7, 459, 1958; Gaudin M. «Nucl. Phys.», 15, 89, 1960.
10. Соловьев В. Г. Теория сложных ядер. М., 1971.
11. Боголюбов Н. Н. ЖЭТФ, 34, 57, 73, 1958.

Поступила в редакцию
22.5 1974 г.

Кафедра
квантовой статистики