Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1—1976

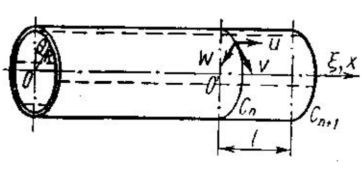
УДК 539.3 : 534.1

В. П. КАНДИДОВ, С. А. ХРИСТОЧЕВСКИЙ

К АНАЛИЗУ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассматривается возможность сокращения числа динамических переменных, приходящихся на один элемент разбиения, при исследовании свободных колебаний цилиндрической оболочки методом конечных элементов. При одном и том же числе степеней свободы используемый подход приводит к возможности увеличения числа элементов разбиения.

Метод конечных элементов является одним из самых современных при исследовании тонких оболочек [1]. В случае круговых цилиндрических оболочек обычно используются элементы в виде отрезков замкнутой оболочки [2]. Такие элементы имеют от 8 до 24 степеней свободы, что затрудняет их применение в практических задачах. В настоящей работе рассматривается возможность сокращения числа степеней свободы, приходящихся на один элемент.



На рис. 1 изображена срединная поверхность круговой цилиндрической оболочки радиуса R, толщины h, при этом $h \ll R$. Положительный отсчет для поперечного $w(x, \theta, t)$, окружного $v(x, \theta, t)$ и продольного $u(x, \theta, t)$ перемещений поверхности указан стрелками. Для круговой цилиндрической оболочки перемещения являются периодическими по θ. Общее решение можно представить в виде ряда Фурье. В частности, для m-ного компонента можно записать:

$$w(x, \theta, t) = W(x, t) \cos m\theta,$$
$$v(x, \theta, t) = V(x, t) \sin m\theta,$$
$$u(x, \theta, t) = U(x, t) \cos m\theta, \qquad (1)$$

где $2m$ — число узловых линий, параллельных оси ox; на рис. 1 узловые линии нанесены штрихами для случая $m=2$.

$W(x, t)$; $V(x, t)$; $U(x, t)$ — соответствующие перемещения в пучностях между узловыми линиями.

Рассмотрим элемент оболочки длины l, который ограничивается двумя плоскостями, перпендикулярными оси ox. Линии пересечения

C_n и C_{n+1} этих плоскостей со срединной поверхностью назовем узловыми контурами элемента, где $n=0, 1, 2...$ — номер контура. За обобщенные координаты элемента, определяющие его деформацию в локальной системе координат $0'\xi$, примем значения функций $W(\xi, t)$, $\beta = \frac{\partial W}{\partial \xi}(\xi, t)$, $V(\xi, t)$, $U(\xi, t)$ в узловых контурах ($\xi=0$, $\xi=l$). Эти величины образуют вектор обобщенных координат

$$q^T(t) = \{W_0,\ W_l\ V_0, V_l,\ U_0,\ U_l,\ \beta_0, \beta_l\}. \qquad (2)$$

Введем вектор обобщенных сил

$$Q^T(t) = \{R_0,\ R_l,\ T_0,\ T_l,\ P_0,\ P_l,\ M_0,\ M_l\}. \qquad (3)$$

Компоненты этого вектора есть значения сил и моментов в пучностях, лежащих на узловых контурах C_n и C_{n+1}. Величина $\pi\, \delta q^T \approx Q$ есть работа сил, приложенных к контурам элемента на виртуальном перемещении.

Зависимость перемещений срединной поверхности элемента от координаты ξ представим в виде

$$\begin{aligned} W(\xi,\ t) &= \psi^T(\xi)\, B_W\, q(t),\\ V(\xi,\ t) &= \chi^T(\xi)\, B_V q(t),\\ U(\xi,\ t) &= \chi^T(\xi)\, B_U q(t), \end{aligned} \qquad (4)$$

где

$$\Psi^T(\xi) = \{1,\ \xi^*,\ \xi^{*2},\ \xi^{*3}\},\quad \chi^T(\xi) = \{1,\ \xi^*\}$$

полная и укороченная системы базисных функций, $\xi^* = \xi/l$, B_W — числовая матрица порядка 4×8; B_V и B_U — 2×8.

Таким образом, поперечное перемещение срединной поверхности на элементе апроксимируется полиномом третьей степени по ξ, а продольные и окружные — полиномами первой.

Для вычисления матрицы жесткости элемента воспользуемся выражением плотности потенциальной энергии деформации, определяемой теорией В. З. Власова [3], которое в случае круговой цилиндрической оболочки примет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon(\xi,\ \theta,\ t) = {} & \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{R\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{w}{R}\right)^2 + \right.\\ & + \frac{2}{R}\nu \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial v}{\partial\theta} - 2\frac{w}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{R\partial\theta}\right) + \frac{1-\nu}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{R\partial\theta}\right)^2 + \right.\\ & \left.\left. + \left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{R\partial\theta}\cdot\frac{\partial v}{\partial \xi}\right]\right\} + \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\right)^2 + \right.\\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 w}{R^2\partial\theta^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\,\frac{\partial^2 w}{R^2\partial\theta^2} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi R\partial\theta}\right)^2\right\}, \end{aligned} \qquad (5)$$

где E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Учитывая (1) и подставляя перемещения в виде (4), после интегрирования по ξ от 0 до l и по θ от 0 до 2π получим энергию упругой деформации элемента

$$E_k = \frac{1}{2} q^T K q,$$

где K — матрица жесткости элемента порядка 8×8. K удобно представить клеточной матрицей, вид которой поясняет физический смысл ее элементов

$$K = \begin{vmatrix} K_{WW} K_{WV} K_{WU} K_{W\beta} \\ K_{VW} K_{VV} K_{VU} K_{V\beta} \\ K_{UW} K_{UV} K_{UU} K_{U\beta} \\ K_{\beta W} K_{\beta V} K_{\beta U} K_{\beta\beta} \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Элементы клетки K_{WW} являются коэффициентами пропорциональности между поперечными силами упругости и поперечными смещениями, элементы K_{WV} — между этими силами и окружными смещениями и т. д.

Матрица масс вычисляется, как обычно, из выражения для виртуальной работы сил инерции

$$\delta A = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^l d\xi \rho(\xi) (\ddot{w}\delta w + \ddot{v}\delta v + \ddot{u}\delta u). \qquad (7)$$

Учитывая (1) и (4), найдем

$$\delta A = -\delta q^T M\ddot{q}. \qquad (8)$$

Матрица масс M имеет структуру, аналогичную матрице жесткости K (6) с отличными от нуля диагональными клетками и клетками $M_{W\beta}$ и $M_{\beta W}$.

Приравнивая вариацию потенциальной энергии виртуальной работе сил инерции и реакции, получим систему из восьми дифференциальных уравнений, описывающих движение отдельного элемента

$$Kq + M\ddot{q} = Q. \qquad (9)$$

Описанный конечный элемент имеет четыре степени свободы, приходящиеся на узловой контур. Это число можно уменьшить до трех, если при вычислении матрицы масс воспользоваться укороченной системой базисных функций $\chi^T(\xi)$ для W. При этом обращаются в нуль клетки $M_{W\beta}$, $M_{\beta W}$ и диагональная клетка $M_{\beta\beta}$. Обобщенные координаты β_0, β_l линейно зависят от остальных координат. Такой элемент называют укороченным [4].

Для оболочки, представленной последовательностью конечных элементов, формулируются условия сопряжения в общих узловых контурах на основе непрерывности функций перемещения по оси x и уравновешенности сил реакции. В результате уравнение свободных колебаний принимает вид

$$K_\Sigma q_\Sigma + M_\Sigma q_\Sigma = 0,$$

где q_Σ — вектор обобщенных координат всей системы, компонентами которого являются смещения W_n, V_n, U_n и β_n в узловых контурах; $n=0, 1, 2 \ldots N$ — номер контура, N — число элементов, K_Σ — матрица жесткости системы, имеющая клеточно-ленточную структуру; M_Σ — матрица масс системы.

Число степеней свободы I совпадает с рангом матрицы M_Σ и определяется числом узловых контуров и видом используемого конечного элемента.

На контурах, совпадающих с границей оболочки, записываются краевые условия. В случае свободно опертой оболочки длины L эти условия имеют вид

$$W_n = V_n = 0 \qquad M_n = P_n = 0, \tag{11}$$

где $n=0,\ N$.

Для оценки точности рассмотрены собственные колебания однородной оболочки со свободно опертыми концами. При этом $L=4{,}5\,R$, $h=0{,}035\,R$ и $\nu=0{,}3$. Собственные частоты оболочки ω, отнесенные к $\omega_0=[Eg/\rho R^2(1-\nu^2)]^{1/2}$, определены при значениях $m=0,\ 1,\ 3$.

m	I	16	17	24	23	Точные значения
	N	4	6	6	8	
	Матрица масс					
	тон	полная	укороченная	полная	укороченная	
0	1_w	1,074	1,014	1,055	1,047	1,039
	2_w	1,609	1,477	1,537	1,485	1,474
	3_w	2,564	2,287	2,372	2,232	2,157
	1_u	0,6698	0,662	0,6611	0,6587	0,6523
	1_v	0,4311	0,425	0,4250	0,4255	0,4202
1	1_w	0,2347	0,2291	0,2274	0,2260	0,2233
	2_w	0,5782	0,5538	0,5480	0,5452	0,5216
	3_w	0,7999	0,7774	0,7682	0,7700	0,7208
	1_u	0,8685	0,8624	0,8628	0,8611	0,8491
	1_v	1,5285	1,4610	1,527	1,508	1,504
3	1_w	0,1102	0,1080	0,1061	0,1057	0,101
	2_w	0,2511	0,2311	0,2191	0,2165	0,1943
	3_w	0,4502	0,4252	0,3926	0,3927	0,3291
	1_u	1,897	1,8698	1,874	1,872	1,841
	1_u	3,287	3,1234	3,286	3,238	3,231

В табл. приведены первые три частоты колебания, при которых преобладает поперечное смещение в узловых контурах ($W>U,\ V$) и по одной частоте при $U>W,\ V$ и при $V>W,\ U$. Преобладающие компоненты указаны индексами у номера тона. Точные значения частот, вычисленные аналитически, помещены в последней колонке; полученные приближенно на ЦВМ с помощью метода конечных элементов — в первых четырех. Для элементов с полной матрицей масс ($M_{\beta\beta}\neq 0$) рассмотрены разбиения на 4 и 6 элементов, число степеней свободы (I) равно 16 и 24 соответственно. Как и следовало ожидать, с увеличением I точность возрастает. Для элементов с укороченной матрицей масс взято $N=6$ ($I=17$) и $N=8$ ($I=23$). Из сравнения результатов видно, что при одинаковом I использование укороченных элементов повышает точность расчета для большинства собственных частот, особенно для меньших I. Это связано с тем, что улучшается аппроксимация упругих свойств оболочки за счет увеличения общего числа элементов.

Таким образом, при заданном числе степеней свободы, которое определяется объемом памяти ЦВМ, использование укороченных элементов позволяет производить более мелкое разбиение, что дает преимущества при исследовании неоднородных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Clough R. W., Wilson E. L. «Comp. Struc.», 1, 33—56, 1971.
2. Webster J. J. «Int. J. Mech. Sci.», 9, 559—570, 1967.
3. Власов В. З. Избранные труды, т. 1. М., 1962.
4. Vysloukh V. A., Kandidov V. P., Chesnokov S. S. «Int. J. Num. Meth. in Engr.», 7, 185—194, 1973.

Поступила в редакцию
2.6 1974 г.

Кафедра общей физики
для мехмата