

В. Н. АНУЧИН, В. М. БЕЛОКОПЫТОВ, Ю. Г. ПЫРКИН,
М. М. ХАПАЕВ

К ВОПРОСУ О ТЕОРЕТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ПРИДОННЫХ ПЛОТНОСТНЫХ ПОТОКОВ НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Описывается решение задачи нахождения распределения средней скорости придонного плотностного потока, распространяющегося вдоль наклонной плоскости, и слоя увлечения окружающей неподвижной жидкости по известному распределению турбулентного напряжения в потоке.

Постановка задачи

В последнее время все большее внимание исследователей привлекает проблема изучения придонных плотностных потоков. Исследование этой проблемы важно как с общетеоретической точки зрения, так и с точки зрения ее практических приложений. С распространением придонных плотностных потоков связаны такие нежелательные явления, как заиливание судоходных каналов и водохранилищ, повреждение подводных коммуникаций.

Имеющиеся в настоящее время данные натуральных и лабораторных измерений позволяют выделить следующие особенности, характеризующие придонные плотностные потоки.

1. Придонные плотностные потоки распространяются на большие расстояния, мало изменяясь по толщине. Так, по данным работы [1], такой поток, пройдя расстояние в 20 миль, увеличился по толщине всего на 1 м, т. е. $\frac{dh(x)}{dx} \sim 3 \cdot 10^{-5}$, где $h(x)$ — толщина придонного плотностного потока, x — координата, направленная вдоль течения. В то же время толщина ламинарного пограничного слоя [2] $\delta(x)$ имеет порядок $\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$, где U_∞ — скорость течения вне пограничного слоя, ν — кинематическая вязкость. Рост $\delta(x)$ будет по крайней мере на два порядка выше, чем наблюдаемый в [1].

2. Вертикальное распределение скорости течения придонного плотностного потока достигает максимальных значений в толще потока, на горизонтах $\frac{1}{2}h < h_{\max} < h$, где h_{\max} — положение максимума скорости [1, 3, 4].

3. Вертикальное распределение плотности характеризуется наличием перегиба в зоне раздела двух жидкостей [5, 6].

4. Механизм течения в зоне раздела двух жидкостей существенно зависит от молекулярной вязкости [7, 8].

5. Граница раздела устойчива относительно малых возмущений [9].

6. Модуль турбулентного напряжения в придонном плотностном потоке имеет два максимума. Один у дна, другой — в зоне раздела двух жидкостей [10, 11]. В то же время, в работе [12] показано, что придонные плотностные потоки имеют двойственный характер: при крупномасштабном рассмотрении их можно считать ламинарными, при мелкомасштабном — турбулентными.

Исходя из сказанного рассмотрим особенности распределения турбулентного напряжения в придонном плотностном потоке, распространяющемся в неподвижной жидкости вдоль наклонного дна и влияние этих особенностей на профиль средней скорости потока и слоя увлечения окружающей неподвижной жидкости.

Считаем, что для придонных плотностных потоков справедливы допущения теории пограничного слоя [2]. Тогда для плотностного потока и вышележащих слоев воды справедливы следующие системы уравнений:

$$U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + W_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} = \frac{\Delta \rho g j}{\rho_1} + \nu_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial W_1}{\partial z} = 0,$$

$$U_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} + W_2 \frac{\partial U_2}{\partial z} = \nu_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial z} = 0,$$

где x — координата, направленная вдоль уклона, z — координата, перпендикулярная дну; U_1 и W_1 — продольная и поперечная составляющие скорости течения плотностного потока; U_2 , W_2 — то же для слоя увлечения; ρ_1 , ν_1 — плотность и кинематическая вязкость плотностного потока; ρ_2 , ν_2 — плотность и кинематическая вязкость окружающей жидкости; $\Delta \rho = \rho_1 - \rho_2$; g — ускорение силы тяжести; $j = \sin \alpha$ (α — угол наклона дна).

Здесь и далее индекс 1 соответствует плотностному потоку, индекс 2 — увлекаемой жидкости.

Обе среды считаем несжимаемыми, диффузией пренебрегаем. Исходя из того, что $\frac{dh(x)}{dx} \sim 10^{-5}$, полагаем $h = \text{const}$ и считаем, что для компонентов скорости справедливы следующие выражения:

$$U_i = \bar{U}_i + U'_i, \quad (3)$$

$$W_i = \bar{W}_i, \quad i = 1, 2,$$

т. е. составляющая скорости по x имеет средний и пульсационный компоненты, а составляющая по z — только пульсационный

Из уравнений неразрывности следует:

$$\frac{d\bar{U}_1}{dx} = \frac{d\bar{U}_2}{dx} = 0, \text{ т. е.}$$

$$\bar{U}_1 = \bar{U}_1(z),$$

$$\bar{U}_2 = \bar{U}_2(z). \quad (4)$$

Подставляя выражения (3) в (1), (2) и проводя осреднение по правилам Рейнольдса с учетом (4), получим

$$\frac{\Delta \rho g j}{\rho_1} + \nu_1 \frac{d^2 \bar{U}_1}{dz^2} - \frac{d\bar{U}_1 \bar{W}'_1}{dz} = 0,$$

$$\nu_2 \frac{d^2 \bar{U}_2}{dz^2} - \frac{d\bar{U}_2 \bar{W}'_2}{dz} = 0. \quad (5)$$

После приведения (5) к безразмерному виду система запишется в виде

$$\frac{1}{\text{Re}_1} \frac{d^2 V_1}{d\eta^2} + \frac{dr_1}{d\eta} = -Fr_*^{-1},$$

$$\frac{1}{\text{Re}_2} \frac{d^2 V_2}{d\eta^2} + \frac{dr_2}{d\eta} = 0, \quad (6)$$

где

$$Fr_*^{-1} = \frac{\Delta \rho g j h}{\rho_1 U_*^2}, \quad \text{Re}_i = \frac{U_* h}{\nu_i}, \quad V_i = \frac{\bar{U}_i}{U_*},$$

$$r_i = -\frac{\bar{U}'_i \bar{W}'_i}{U_*^2}, \quad \eta = \frac{z}{h}, \quad U_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \quad i = 1, 2;$$

τ_0 — касательное напряжение на дне при турбулентном течении. Граничные условия для системы имеют следующий вид:

$$V_1 |_{\eta=0} = 0 \quad (7)$$

$$V_2 |_{\eta=k} = 0 \quad (8)$$

$$V_1 |_{\eta=1} = V_2 |_{\eta=1} \quad (9)$$

$$\left. \frac{dV_1}{d\eta} \right|_{\eta=1} = \chi \left. \frac{dV_2}{d\eta} \right|_{\eta=1}, \quad \text{где } \chi = \frac{\rho_2 \nu_2}{\rho_1 \nu_1} \quad (10)$$

$$r_1 |_{\eta=0} = 0 \quad (11)$$

$$r_2 |_{\eta=k} = 0 \quad (12)$$

$$r_1 |_{\eta=1} = r_2 |_{\eta=1}. \quad (13)$$

Граничные условия (8) и (12) означают, что толщина слоя увлечения ограничена. Как показывают экспериментальные данные, она находится в пределах от 1,5 до 2 h [10].

Вертикальное распределение турбулентного напряжения и профиль средней скорости

Для замыкания системы уравнений (6) можно использовать полуэмпирические теории, однако, как показано в [12], теория подобия

Кармана для придонных плотностных потоков не выполняется. Поэтому при анализе системы (6) мы будем подобно Бай-Ши-и [13] считать известным вертикальное распределение турбулентного напряжения. Функции r_1 и r_2 задаем следующим образом:

$$r_1 = \left(\frac{1}{l} \eta - 1\right) \left[1 - \left(\frac{1}{l} \eta - 1\right)^{2(n-1)}\right] \frac{n(s-1)}{s(n-1)}, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (14)$$

$$r_2 = \left(\frac{1}{l} - 1\right) \left[1 - \left(\frac{1}{l} - 1\right)^{2(n-1)}\right] \frac{n(s-1)(k-\eta)}{s(n-1)(k-1)}, \quad 1 \leq \eta \leq k \quad (15)$$

где n — целое число, большее или равное 2; s — отношение касательного напряжения на дне при турбулентном течении τ_0 к соответствующему

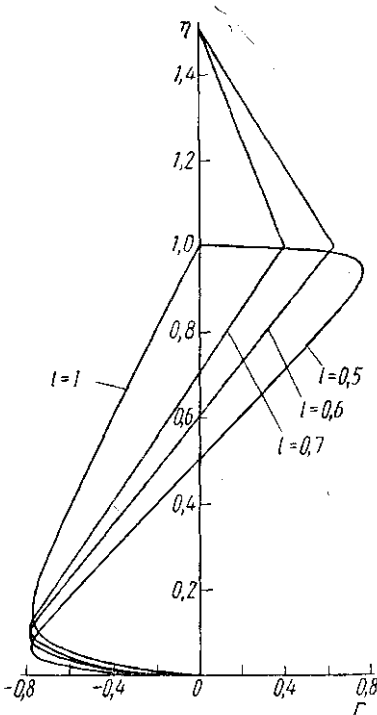


Рис. 1

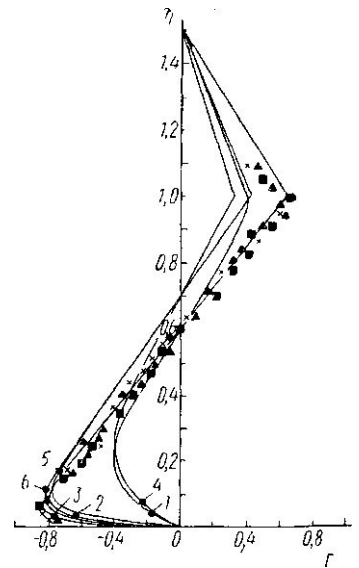


Рис. 2

шему касательному напряжению на дне τ_0 при ламинарном течении плотностного потока с той же максимальной скоростью. При $s=1$ $r_1=r_2=0$. Это соответствует ламинарному режиму течения придонного плотностного потока, рассмотренному в работе [14].

Параметр l определяет точку перехода через ноль турбулентного напряжения в придонном плотностном потоке. Очевидно, l зависит от разности плотностей двух жидкостей, уклона дна, толщины потока и максимальной скорости течения. В нашем случае для l справедливо выражение

$$l = MFr_*. \quad (16)$$

Коэффициент M находится из экспериментальных данных. В случае придонных плотностных потоков $1/2 < l < 1$. $l=1/2$ соответствует распределению турбулентного напряжения для плоскопараллельного течения

в канале; $l=1$ — распределению турбулентного напряжения в жидкости со свободной верхней границей.

Таким образом, вертикальное распределение турбулентного напряжения может быть задано функциями (15), (14), которые соответствуют физическому смыслу задачи и удовлетворяют граничным условиям (11)—(13).

На рис. 1 представлены вертикальные распределения турбулентного напряжения, рассчитанные по формулам (14), (15) для $s=8$, $n=12$, $k=1,5$ и $l=0,5; 0,6; 0,7; 1$.

На рис. 2 представлены вертикальные распределения турбулентного напряжения, рассчитанные по формулам (14), (15) для значений параметров s , n , k и l , приведенных в табл. 1.

На этот же рисунок нанесены экспериментальные данные [10]. Наибольшее согласие с экспериментом дает кривая, рассчитанная для $l=0,6$, $s=10$ и $n=15$.

Значение n определяется соотношением $n \approx 1,5 s$.

Подставляя (14), (15) в систему (6) и интегрируя ее, получаем выражения для средней скорости течения придонного плотностного потока и слоя увлекаемой жидкости, которые будут иметь соответственно вид

$$V_1 = -\frac{\text{Re}_1 l (s-1)}{2s(n-1)} \left(\frac{1}{l} \eta - 1 \right)^2 \left[n - \left(\frac{1}{l} \eta - 1 \right)^{2(n-1)} \right] - \frac{\text{Re}_1}{2Fr_*} \eta^2 + C_1 \eta + C_2, \quad (17)$$

$$V_2 = -\text{Re}_2 \left(\frac{1}{l} - 1 \right) \left[1 - \left(\frac{1}{l} - 1 \right)^{2(n-1)} \right] \frac{n(s-1)}{s(n-1)} \frac{k\eta - \frac{\eta^2}{2}}{k-1} + C_3 \eta + C_4.$$

Постоянные C_1 , C_2 , C_3 , C_4 находятся из граничных условий (7)—(10):

$$C_1 = \text{Re}_1 \left[A + Fr_*^{-1} - \frac{\chi \left(A + \frac{Fr_*^{-1}}{2} - B \right)}{\chi + k - 1} - \frac{\chi (s-1) l}{2s(\chi + k - 1)} \right] + \text{Re}_2 A \chi \left[\frac{2\chi + k - 1}{2(\chi + k - 1)} - 1 \right], \quad (18)$$

$$C_2 = \frac{\text{Re}_1 (s-1) l}{2s}, \quad (19)$$

$$C_3 = \frac{\text{Re}_2 A (2\chi + k - 1)}{2(\chi + k - 1)} - \frac{\text{Re}_1}{\chi + k - 1} \left[A + \frac{Fr_*^{-1}}{2} - B + \frac{(s-1) l}{2s} \right], \quad (20)$$

$$C_4 = \frac{A \text{Re}_2 k [2\chi + k(1-\chi) - 1]}{2(\chi + k - 1)(k-1)} + \frac{k \text{Re}_1}{\chi + k - 1} \left[A + \frac{Fr_*^{-1}}{2} - B + \frac{(s-1) l}{2s} \right],$$

где

$$A = \left(\frac{1}{l} - 1 \right) \left[1 - \left(\frac{1}{l} - 1 \right)^{2(n-1)} \right] \frac{n(s-1)}{s(n-1)}, \quad (21)$$

$$B = \frac{l}{2} \left(\frac{1}{l} - 1 \right)^2 \left[1 - \left(\frac{1}{l} - 1 \right)^{2(n-1)} \right] \frac{n(s-1)}{s(n-1)}.$$

Таблица 1

№ кривых	1	2	3	4	5	6
k	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
l	0,6	0,6	0,6	0,7	0,7	0,7
s	2	8	10	2	8	10
n	3	12	15	3	12	15

Таблица 2

№ кривых	1	2	3
k	1,5	1,5	1,5
l	0,6	0,6	0,6
s	2	8	10
n	3	12	15

Таким образом, по известному распределению турбулентного напряжения может быть найдено распределение средней скорости придонного плотностного потока и слоя увлечения окружающей жидкости.

На рис. 3 изображены вертикальные распределения средней скорости, рассчитанные по формулам (17) для $\chi=0,8$ и значений параметров l , k , s и n , приведенных в табл. 2.

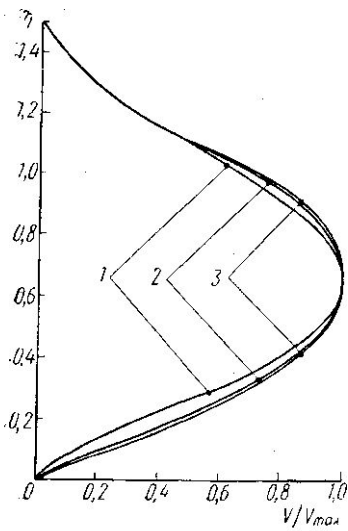


Рис. 3

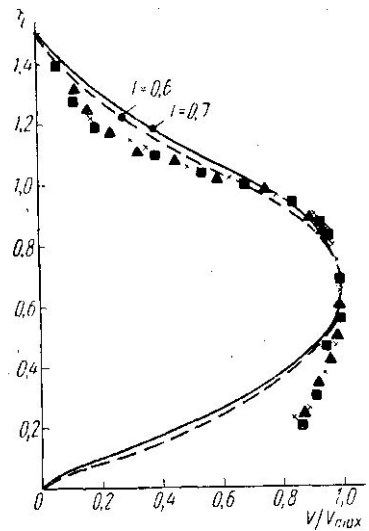


Рис. 4

Следует отметить, что с ростом параметров s и n наблюдается все больший рост скорости в нижней части потока, а максимум становится все более размытым.

На рис. 4 представлены экспериментальные данные Георгиева [10] и вертикальные профили скорости течения, рассчитанные для $\chi=0,8$, $k=1,5$, $s=10$, $n=15$ при значениях $l=0,6$ и $0,7$. Как видно из рисунка, имеет место качественное совпадение рассчитанных профилей при $l=0,6$ с экспериментальными данными.

Весьма интересным и важным является решение обратной задачи, т. е. нахождение вертикального распределения турбулентного напряжения по известному распределению средней скорости течения. В этом случае выражения для распределений турбулентного напряжения будут иметь вид

$$r_1 = -Fr_*^{-1}\eta - \frac{1}{Re_1} \frac{dV_1}{d\eta} + \frac{1}{Re_1} \frac{dV_1}{d\eta} \Big|_{\eta=0},$$

$$r_2 = -\frac{1}{Re_2} \frac{dV_2}{d\eta} + \frac{1}{Re_2} \frac{dV_2}{d\eta} \Big|_{\eta=k}.$$
(23)

В заключение следует отметить, что вышеприведенный анализ позволяет получить распределение средней скорости потока при заданном распределении турбулентного напряжения. Предложенный профиль турбулентного напряжения хорошо согласуется с экспериментальными данными и учитывает особенности плотностных потоков. В то же время рассмотренная схема позволяет получить некоторые сведения о турбулентных характеристиках, не производя прямого измерения пульсаций скорости течения и статистической обработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анучин В. Н., Гусев А. М., Михайлова Н. А., Петров В. П., Пыркин Ю. Г. Материалы Международного симпозиума по стратифицированным течениям. Новосибирск, 1972.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., 1969.
3. Кулеш Н. П. «Изв. вузов», строительство и архитектура, № 8. Новосибирск, 1959.
4. Поборчая Л. В. «Океанология», 2, № 5, 1962.
5. Кинд К. Я. Труды координационных совещаний по гидротехнике, вып. 2. М.—Л., 1964.
6. Elder R. A., Wunderlich W. O. Inflow density currents in two reservoirs. Intern. Symp. of stratif. flows. Novosibirsk, 1972.
7. Barr D. I. H. «Densimetric exchange flow in rectangular channels (III). Large scale experiments. Houille blanche, No. 6, 1967.
8. Розовский И. Л., Шабрин А. Н., Марков С. Б. Материалы Международного симпозиума по стратифицированным течениям. Новосибирск, 1972.
9. Brown F. K., Wang Y. H. An experiment on the growth of small disturbances at the interface between two streams of different densities and velocities. Intern. Symp. of stratif. flows. Novosibirsk, 1972.
10. Georgiev B. V. Some experimental investigation on turbulent characteristics of stratified flows. Intern. Symp. of stratif. flows. Novosibirsk, 1972.
11. Анисимова Е. П., Сперанская А. А. Материалы Международного симпозиума по стратифицированным течениям. Новосибирск, 1972.
12. Анучин В. Н., Гусев А. М., Пыркин Ю. Г. «Метеорология и гидрология», № 2, 1974.
13. Pai S. I. «Appl. Mech.», 20, No. 1, 1953.
14. Анучин В. Н., Гусев А. М., Петров В. П., Пыркин Ю. Г., Хапаев М. М. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., 15, № 4, 1974.

Поступила в редакцию
11.11 1974 г.

Кафедра физики моря
и вод суши