Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1976

УДК 530.12:531.51

Ю. С. ВЛАДИМИРОВ, А. Э. ШЕЛКОВЕНКО

МЕТОД ХРОНОКИНЕМЕТРИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ

Излагается частный случай общего диадного метода — метод хронокинеметрических инвариантов. Временноподобный вектор диады калибруется хронометрическим образом, а пространственноподобный вектор — кинеметрическим. Записаны выражения для основных физико-геометрических величин диадного метода и для дифференциальных операторов.

Монадные и диадные методы получают все более широкое применение при исследовании ряда фундаментальных проблем общей теории относительности [1—7]. Эти методы целесообразно использовать в тех случаях, когда характер рассматриваемой задачи диктует выделение лишь одного или двух направлений (а не всех четырех, как в тетрадном методе). Так, для задания системы отсчета достаточно выделить только одно временноподобное направление (4-скорость приборов), т. е. необходимо использовать монадный метод. При рассмотрении волновых процессов относительно системы отсчета приходится кроме 4-скорости системы отсчета выделять еще и ортогональное к первому пространственноподобное направление распространения волнового процесса.

Суть общего диадного метода[1] состоит в задании двух ортонормированных векторных полей [1]. Ограничимся случаем b-диадного метода, когда одно направление (вектор τ^μ) временноподобное ($\tau^\mu\tau_\mu = 1$) и одно направление (вектор l^μ) пространственноподобное ($l^\mu l_\mu = -1$). Тогда метрический тензор $g^{\mu\nu}$ можно представить в виде

$$g^{\mu\nu} = \tau^\mu\tau^\nu - l^\mu l^\nu - \gamma^{\mu\nu}, \qquad (1)$$

где $\gamma_{\mu\nu}$ имеет смысл метрического тензора двухмерного пространственноподобного сечения, ортогонального линиям τ и l.

В ряде работ были рассмотрены конкретные калибровки диадного метода. Так, в [2] рассматривалась дважды хронометрическая калиб-

[1] В работах Р. Ф. Полищука [8] развивается метод, называемый им диадным, основанный на (2+2)-расщеплении пространства времени. В нашей работе под диадным методом понимается способ (1+1+2)-расщепления. Общепринято тетрадным методом называть способ (1+1+1+1)-расщепления; уже достаточно привыкли называть монадным метод, основанный на (1+3)-расщепления. Поэтому естественнее назвать диадным метод (1+1+2)-расщепления, а метод Р. Ф. Полищука — диарным.

ровка b-диады, состоящая в последовательном выделении координат x^0 и x^1 способом, аналогичным методу хронометрических инвариантов [3]. В работах [4, 5] была развита и применена к изучению проблемы гравитационных волн дважды кинеметрическая калибровка, основанная на последовательном выделении x^0 и x^1 [6, 7]. Наконец, в [8] рассмотрен метод кинехронометрических инвариантов, т. е. калибровка первого вектора τ^μ кинеметрическим, а второго l^μ — хронометрическим способом. Все эти методы связаны с выделением классов координатных преобразований.

В настоящей работе рассмотрен метод хронокинеметрических инвариантов, состоящий в калибровке первого вектора τ^μ хронометрическим способом

$$\tau^\mu = \frac{g_0^\mu}{\sqrt{g_{00}}} \to \tau_\mu = \frac{g_{0\mu}}{\sqrt{g_{00}}}; \quad h_{\mu\nu} = \tau_\mu \tau_\nu - g_{\mu\nu} = \frac{g_{0\mu} g_{0\nu}}{g_{00}} - g_{\mu\nu}, \tag{2}$$

а второго l^μ — кинеметрическим:

$$l_\mu = \frac{h_\mu^1}{\sqrt{h^{11}}} \to l^\mu = \frac{h^{\mu 1}}{\sqrt{h^{11}}}. \tag{3}$$

Вектор l^μ имеет следующие компоненты:

$$l_\mu = \left\{0, -\frac{1}{\sqrt{-g^{11}}}, 0, 0\right\};$$

$$l^\mu = \left\{-\frac{g^{10}}{\sqrt{-g^{11}}}; \sqrt{-g^{11}}; -\frac{g^{12}}{\sqrt{-g^{11}}}; -\frac{g^{13}}{\sqrt{-g^{11}}}\right\}. \tag{4}$$

Тогда метрический тензор двухмерного пространственноподобного сечения $\gamma_{\mu\nu}$ находится в виде ($\xi, \eta = 2, 3$):

$$\gamma^{\mu\nu} = \begin{Vmatrix} \frac{g^{11} + g_{00}(g^{01}g^{01} - g^{11}g^{00})}{g_{00}g^{11}}; & 0 & \gamma^{0\xi} = \frac{g^{10}g^{1\xi}}{g^{11}} - g^{0\xi}; & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma^{\xi 0} = \frac{g^{01}g^{1\xi}}{g^{11}} - g^{\xi 0}; & 0 & \gamma^{\xi\eta} = \frac{g^{1\xi}g^{1\eta}}{g^{11}} - g^{\xi\eta}; & \\ & 0 & & \end{Vmatrix};$$

$$\gamma_{\mu\nu} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g_{00} + g^{11}(g_{01}g_{01} - g_{00}g_{11})}{g_{00}g^{11}}; & \gamma_{1\xi} = \frac{g_{01}g_{0\xi}}{g_{00}} - g_{1\xi}; & \\ 0 & & & \\ 0 & \gamma_{\xi 1} = \frac{g_{01}g_{0\xi}}{g_{00}} - g_{1\xi}; & \gamma_{\xi\eta} = \frac{g_{0\xi}g_{0\eta}}{g_{00}} - g_{\xi\eta}; & \end{Vmatrix}; \tag{5}$$

Множество координатных систем, полученных из исходной с сохранением калибровки (2), (3), связано преобразованиями координат

$$x^{0'} = x^{0'}(x^0, x^1, x^2, x^3) \text{ и } x^{1'} = x^{1'}(x^1), \tag{6}$$

$$x^{\xi'} = x^{\xi'}(x^1, x^2, x^3). \tag{7}$$

Назовем хронокинеметрически инвариантными (х. к. и.) величины, инвариантные при преобразованиях (6) и ковариантные относительно преобразований (7). Таким свойством обладают следующие величины:

$$\overline{B}^{\xi\eta\ldots}_{\varphi\psi\ldots} \equiv B^{\overbrace{11\ldots1}^{m}\,\xi\eta\ldots}_{\underbrace{00\ldots0}_{n}\,\underbrace{\lambda\sigma\ldots}_{k}} \frac{1}{(g_{00})^{n/2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{-g^{11}}}\right)^m \underbrace{\gamma^{\lambda}_{\varphi}\gamma^{\sigma}_{\psi}\ldots}_{k}, \tag{8}$$

где B^{μ}_{ν} — произвольный тензор, чертой сверху обозначены величины, спроектированные на двухмерное пространственноподобное сечение γ.

Из составляющих метрический тензор величин (1) этим свойством обладают только компоненты тензора $\gamma_{\xi\eta}$ и $\gamma^{\xi\eta}$;

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{g_{0\xi}g_{0\eta}}{g_{00}} - g_{\xi\eta}; \quad \gamma^{\xi\eta} = \frac{g^{1\xi}g^{1\eta}}{g^{11}} - g^{\xi\eta}. \tag{9}$$

Как известно [1], в общем диадном методе из первых производных от составляющих метрического тензора можно построить 11 основных физико-геометрических тензоров. (В монадном методе их только три: F_μ — вектор ускорения, $A_{\mu\nu}$ — тензор угловой скорости вращения и $D_{\mu\nu}$ — тензор скоростей-деформаций системы отсчета). В хронокинеметрической калибровке два из них ($a_{\mu\nu}$ и q_μ) тождественно обращаются в ноль.

Оставшиеся 9 величин имеют вид

$$\overline{F}_\xi = \tau^0(\tau_{\xi,0} - \tau_{0,\xi}); \; f_\xi = l^1(\gamma^0_\xi l_{1,0} - l_{1,\xi}); \; \widehat{F} = l^i\tau^0(\tau_{i,0} - \tau_{0,i});$$
$$\overline{D}_{\xi\eta} = -\gamma^{\alpha}_{\xi}\gamma^{\beta}_{\eta}E_{\alpha\beta,\lambda}\tau^{\lambda}; \quad d_{\xi\eta} = -\gamma^{\alpha}_{\xi}\gamma^{\beta}_{\eta}E_{\alpha\beta,\lambda}l^{\lambda}; \tag{10}$$
$$\widehat{D} = -\tau^0 l^1 l_{1,0}; \quad \Lambda^\xi = \frac{1}{2}\tau^0(l^\xi_{1,0} - l^\xi l^1 l_{1,0});$$
$$\overline{A}_{\xi\eta} = \frac{1}{2}[\gamma^0_\xi(\tau_{\eta,0} - \tau_{0,\eta}) + \gamma^0_\eta(\tau_{\xi,0} - \tau_{0,\xi}) + (\tau_{\xi,\eta} - \tau_{\eta,\xi})],$$

где $E_{\alpha\beta,\lambda} = \frac{1}{2}(\gamma_{\alpha\lambda,\beta} + \gamma_{\beta\lambda,\alpha} - \gamma_{\alpha\beta,\lambda})$ — коэффициенты связности двухмерного пространственноподобного сечения.

Легко видеть, что основные диадные физико-геометрические тензоры могут иметь отличные от нуля компоненты с индексами 0 и 1, однако они не обладают свойством х. к. и. Кроме того, вследствие $\gamma^{\mu}_{0} = \gamma^{1}_{\mu} = 0$ все контравариантные компоненты с индексом 1 и все ковариантные компоненты с индексом 0 γ-спроектированных тензоров равны нулю.

В работе [1] для общего диадного метода записаны операторы дифференцирования γ-спроектированных величин вдоль направлений τ^μ, l^μ и γ-поверхности. Используя калибровку (2) и (3), а также (8), из них можно получить операторы, приводящие опять к х. к. и. величинам. Запишем их.

1. Временная х. к. и. производная от х. к. и. тензоров

$$\frac{\partial \overline{B}^{\xi\ldots}_{\eta\ldots}}{\partial x^0} \to \overset{**}{\partial}_T \overline{B}^{\xi\ldots}_{\eta\ldots} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial}{\partial x^0}\overline{B}^{\xi\ldots}_{\eta\ldots} \tag{11}$$

совпадает с хронометрически инвариантной временной производной (и не зависит от ранга и ковариантности дифференцируемой величины).

2. Х. к. и. пространственная по выделенному l^μ направлению производная от (х. к. и.) тензоров:

$$\frac{\partial \overline{B}^{\xi\ldots}_{\eta\ldots}}{\partial x^1} \to \overset{**}{\partial}_L \overline{B}^{\xi\ldots}_{\eta\ldots} = l^\sigma \frac{\partial \overline{B}^{\xi\ldots}_{\eta\ldots}}{\partial x^\sigma} + L^{\xi}_{\cdot\varphi}\overline{B}^{\varphi\ldots}_{\eta\ldots} + \ldots - L^{\varphi}_{\cdot\eta}\overline{B}^{\xi\ldots}_{\varphi\ldots} - \ldots, \tag{12}$$

где $L^{\xi}_{\cdot\varphi} = \gamma^{\xi}_{1,\sigma}\gamma^{\sigma}_{\varphi} l^{1}$. Этот оператор имеет вид, характерный для общего b-диадного метода.

3. Ковариантная х. к. и. производная по направлениям γ-поверхности:

$$\frac{\partial \bar{B}^{\xi\cdots}_{\eta\cdots}}{\partial x^{\varphi}} \to \overset{**}{\nabla}_{\varphi} \bar{B}^{\xi\cdots}_{\eta\cdots} = \overset{**}{\partial}_{\varphi} \bar{B}^{\xi\cdots}_{\eta\cdots} + \overset{**}{E}{}^{\xi}_{\zeta\varphi} \bar{B}^{\zeta\cdots}_{\eta\cdots} + \ldots - \overset{**}{E}{}^{\zeta}_{\eta\varphi} \bar{B}^{\xi\cdots}_{\zeta\cdots} - \ldots, \tag{13}$$

где

$$\overset{**}{\partial}_{\varphi} = -\gamma^{\mu}_{\varphi}\partial_{\mu}; \quad \overset{**}{E}{}^{\xi}_{\zeta\varphi} = \frac{1}{2}\gamma^{\xi\psi}(\overset{**}{\partial}_{\zeta}\gamma_{\psi\varphi} + \overset{**}{\partial}_{\varphi}\gamma_{\zeta\psi} - \overset{**}{\partial}_{\psi}\gamma_{\zeta\varphi}).$$

Данная производная имеет вид, аналогичный выражению в методе хронометрических инвариантов.

Основные уравнения и соотношения ОТО (уравнения геодезических, компоненты тензора кривизны и. т д.) в х. к. и. виде легко получить из соответствующих формул для общего диадного метода [1], подставив туда введенные х. к. и. величины и операторы.

Развитый в данной работе метод может оказаться полезным для задания системы отсчета одиночного наблюдателя, а также при изучении задач, связанных с излучением или поглощением гравитационных и электромагнитных волн в ОТО.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров Ю. С. Диадный метод в общей теории относительности. Депонировано, ВИНИТИ, № 7228—73, 1973 г.
2. Владимиров Ю. С. Тезисы докладов III Советской гравитационной конференции. Ереван, 1972, стр. 29.
3. Зельманов А. Л. ДАН СССР, **107**, 815, 1956.
4. Владимиров Ю. С., Ефремов В. Н. Тезисы докладов V Всесоюзной геометрической конференции. Самарканд, 1972, стр. 38.
5. Владимиров Ю. С., Ефремов В. Н. Сб. «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц», вып. 5. М., 1974, стр. 24.
6. Зельманов А. Л., ДАН СССР, **209**, 822, 1973.
7. Владимиров Ю. С., Антонов В. И. Препринт ИТФ-72-137Р. Киев, 1972; Тезисы III Советской гравитационной конференции. Ереван, 1972, стр. 199.
8. Полищук Р. Ф. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., **14**, № 1, 3, 1973.
9. Владимирова Л. Ф. Сб. «Проблемы гравитации». МОИП, 1975 (в печати).

Поступила в редакцию
6.1. 1975 г.

Кафедра
теоретической физики