Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1976

УДК 621.391.2

А. Г. ВАНЦЯН, Р. Л. СТРАТОНОВИЧ

# НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИЕМА КВАНТОВЫХ СИГНАЛОВ

Рассматривается проблема оптимальной обработки квантового сигнала. Вводится идеальное квазиизмерение, повышающее качество оценочного алгоритма. В специальном квадратично-гауссовском случае доказывается оптимальность одного частного алгоритма оценки некоммутирующих величин, основанного на квазиизмерении.

## Введение

Проблема оптимального приема и обработки квантовых сигналов привлекает к себе в последнее время все большее внимание исследователей. Это связано прежде всего с применением в технике связи различных приборов и устройств, работающих в диапазоне столь высоких частот, где роль квантовых эффектов становится заметной. Вследствие этого возникает необходимость в обобщении методов теории статистических решений и оценок на случай квантовых каналов. В настоящей работе проводится дальнейшее квантовое обобщение этой теории, начатое в [1] и ряде других работ.

Как известно (см., например, [2]), в классической теории общая постановка байесовских задач теории статистических решений такова. На вход канала связи поступает некоторый сигнал $x^{\mathrm{T}}=(x_1, \ldots, x_n)$. На основании наблюдения статистически связанного с ним сигнала на выходе канала связи $y^{\mathrm{T}}=(y_1, \ldots, y_r)$ требуется наилучшим по заданному качественному критерию принять решение (внести оценку) $u=\gamma(y)$ так, чтобы соответствующий ему средний риск

$$R=\int c(x, \gamma(y))\, P(dy\,|\,x)\, P(dx) \tag{1}$$

был минимален. При этом входящие в (1) функция штрафов $c(x, \gamma)$, а также совместное распределение $P(dx, dy)=P(dy|x)P(dx)$ предполагаются заданными.

Отличие квантовых каналов от классических состоит в том, что компоненты обоих векторов $x$ и $y$ представляют собой набор некоммутирующих и, следовательно, одновременно не измеримых операторов и говорить об их совместном распределении в прежнем смысле нельзя. В данной работе рассматривается тот частотный случай, когда квантовую природу имеет лишь наблюдаемый сигнал $y$, величины $x$ предполагаются классическими. При этом без ограничения общности можно считать, что вектор $y$ состоит из $s$ сопряженных пар координат и импульсов и из $r-2s$ коммутирующих с ними и между собой операторов.

Поскольку величины $x$ классические, то для них остается в силе распределение $P(dx)$; что касается переменных $y$, то их статистические свойства описывает заданная условная матрица плотности $\rho(x)$, являющаяся эрмитовым оператором в гильбертовом пространстве $H_y$, в котором действуют операторы $y$.

Запишем по аналогии с (1) средний квантовый риск

$$R = \iint c(x, \gamma(b))\, P(db|\, x)\, P(dx). \tag{2}$$

Здесь условное распределение $P(db/x)$ представляет собой распределение вероятностей результатов квантового измерения некоторого полного набора коммутирующих операторов $B=(B_1, ..., B_m)$. При этом согласно постулатам квантовой теории

$$P(db\,|\,x) = \operatorname{Tr} E(db)\, \rho(x), \tag{3}$$

где $E(db)$ — ортогональное разложение единицы операторов $B$. Этот способ обработки квантового сигнала называется прямым измерением. Лучшие результаты, однако, дает более общий способ обработки квантового сигнала — так называемое квазиизмерение.

## Обработка квантового сигнала посредством квазиизмерения

В самом общем случае квазиизмерение определяется как линейное преобразование от матрицы плотности $\rho$ к распределению вероятностей $P(\Gamma)$:

$$P(\Gamma) = \operatorname{Tr} \Pi(\Gamma)\, \rho, \tag{4}$$

где $\Gamma$ — множество пространства оценок $U$; $\Pi(\Gamma)$ — эрмитова операторная мера, обладающая свойствами неотрицательной определенности, нормировки $\Pi(U)=1$ и $\sigma$-аддитивности.

Согласно (4) условное распределение вероятностей квантовых оценок равно

$$P(du\,|\,x) = \operatorname{Tr} \Pi(du)\, \rho(x). \tag{5}$$

(Эта формула, как нетрудно видеть, обобщает формулу (3) на случай квазиизмерения.)

С учетом (5) запишем основную задачу квантовой байесовской теории, как минимизацию по $\Pi$ риска

$$\int P(dx) \operatorname{Tr} \int c(x, u)\, \Pi(du)\, \rho(x).$$

Проведение этой минимизации в случае произвольного вида оператора $\Pi$ представляет, по-видимому, значительные трудности. Задача упрощается, если ограничиться так называемым идеальным квазиизмерением. Назовем квазиизмерение идеальным, если оператор $\Pi$ представим в виде $\Pi(du) = \varphi_u \overset{*}{\varphi}_u du$. Квазиоптимальные (т. е. оптимальные в классе идеальных квазиизмерений) оценки будут, вообще говоря, хуже абсолютно оптимальных, однако все же есть основания полагать, что они окажутся достаточно удовлетворительными. В частности, в рассматриваемом ниже квадратично-гауссовском случае квазиоптимальные оценки оказываются абсолютно оптимальными.

В случае идеального квазиизмерения формула (5) принимает вид

$$P(du\,|\,x) = \operatorname{Tr} \varphi_u \varphi_u^* du\, \rho(x) = \varphi_u^* \rho(x) \varphi_u\, du, \tag{6}$$

а условие нормировки $\int \Pi(du) = 1$ запишется следующим образом

$$\int \varphi_u \varphi_u^* du = 1. \tag{7}$$

Таким образом, в случае идеального квазиизмерения требуется найти оптимальные функции $\varphi_u$. Найдем уравнение, которому они должны удовлетворять. Поскольку требуется минимизировать риск

$$\iint \varphi_u^* P(dx)\, c(x, u)\, \rho(x)\, \varphi_u\, du \tag{8}$$

при дополнительном условии (7), то можно применить метод неопределенных множителей Лагранжа. Обозначая

$$r(u) = \int P(dx)\, c(x, u)\, \rho(x) \tag{9}$$

и вводя неопределенный оператор $\Lambda$, будем минимизировать выражение

$$V = \int \varphi_u^* r(u) \varphi_u\, du + \int \varphi_u^* \Lambda \varphi_u\, du.$$

Варьируя $V$ по $\varphi_u^*$ и учитывая произвольность вариации $\delta\varphi_u^*$, получим уравнение

$$(r(u) - \Lambda) \varphi_u = 0. \tag{10}$$

Умножая его справа на $\varphi_u^*$ и интегрируя с учетом (7), найдем неопределенный оператор $\Lambda$:

$$\Lambda = \int r(u) \varphi_u \varphi_u^* du. \tag{11}$$

Подставляя это значение в (10), получим окончательно

$$A \varphi_u = 0, \tag{12}$$

где

$$A(u) = r(u) - \int r(v) \varphi_v \varphi_v^* dv. \tag{13}$$

## Физическая реализация квазиизмерения. Косвенное измерение

Простым частным случаем физической реализации квазиизмерения является описанное выше прямое измерение. Напомним, что оптимальное решение $u=\gamma(b)$ в этом случае принимается на основании непосредственного измерения некоторого полного набора коммутирующих операторов $B$, входящих в наблюдаемую последовательность $y$.

Другим важным случаем реализации квазиизмерения является косвенное квантовое измерение, сущность которого заключается в следующем. К рассматриваемой системе $S$, характеризуемой гильбертовым пространством $H_y$, в котором действуют операторы $y$, $\rho_s$, подключается дополнительная независимая от $S$ система $A$, операторы которой действуют в гильбертовом пространстве $H_A$ и состояние которой задается матрицей плотности $\rho_A$. В полученной комбинированной системе, которой соответствуют $H_S \otimes H_A$, $\rho_S \cdot \rho_A$, измеряется некоторый полный набор коммутирующих операторов $B$.

Поскольку такое измерение есть не что иное, как прямое измерение операторов $B$ в $H_S \otimes H_A$, то распределение вероятностей квантовых оценок в этом случае находится по обычной формуле типа (3):

$$P(du) = \mathrm{Tr}\, \rho_A \rho_S E(du), \tag{14}$$

где $E(du)$ — разложение единицы измеряемых операторов $B$ в пространстве оценок $U$. Производя в (14) парциальное усреднение по переменным дополнительной системы $A$ и обозначая $\Pi(du) = \mathrm{Tr}_A E(du) \rho_A$, получим для $P(du)$:

$$P(du) = \mathrm{Tr}\, \rho_s \Pi(du), \tag{15}$$

откуда видно, что (15) соответствует (4), т. е. косвенное измерение есть частный случай квазиизмерения.

Покажем теперь, что если состояние дополнительной системы $A$ чистое, т. е. если $\rho_A = \Psi_A \Psi_A^*$, то описанное косвенное измерение является идеальным. Действительно, записав разложение единицы в виде проектора $E(du) = \psi_u \psi_u^* \, du$, получим

$$P(du) = \psi_u^* \rho_S \Psi_A \Psi_A^* \psi_u \, du = \mathrm{Tr}\, \rho_S \varphi_u \varphi_u^* \, du. \tag{16}$$

Сравнение (16) с (6) доказывает идеальность косвенного измерения.

Примером идеального косвенного измерения может служить измерение некоммутирующих операторов

$$a^{\mathrm{T}} = (a_1, \ldots, a_s); \quad a^+ = (a_1^*, \ldots, a_s^*),$$

где $a$, $a^*$ — операторы уничтожения и рождения квантов. Следуя правилам косвенного измерения, подключим к исходной системе дополнительную систему $A$ и будем измерять следующие коммутирующие операторы:

$$B^{\mathrm{T}} = (a_1 + a_1^{*A}, \ldots, a_s + a_s^{*A}); \quad B^+ = (a_1^* + a_1^A, \ldots, a_s^* + a_s^A). \tag{17}$$

Такие комбинации возникают в результате физического взаимодействия систем $S$ и $A$. Измерение этих комбинаций соответствует подключению неквантового измерительного прибора к комбинированной квантовой системе $S+A$ после взаимодействия.

Как нетрудно показать, операторам (17) соответствует следующая система ортонормированных собственных функций:

$$\psi_b = \pi^{-s/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} b^+ b + a^+ b + b^+ a_A^* - a^+ a_A^*\right\} \Psi_0 \Psi_0^A, \tag{18}$$

где $b^+ = (b_1^*, \ldots, b_s^*)$ — комплексный вектор; $\Psi_0$ — вакуумная волновая функция, а индекс $A$ показывает, что соответствующие операторы относятся к дополнительной системе $A$.

Для нахождения функций $\varphi_b$, реализующих косвенное измерение, положим, что состояние дополнительной системы $A$ описывается вакуумной волновой функцией $\Psi_0^A$. Тогда, полагая $\varphi_b = \Psi_0^{*A} \psi_b$ и подставляя сюда (18), получим с учетом $a\Psi_0 = 0$:

$$\varphi_b = \pi^{-s/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} b^+ b + a^+ b\right\} \Psi_0. \tag{19}$$

(Эти функции известны как волновые функции «когерентных состояний» многомодового гармонического осциллятора [3].)

Покажем, наконец, что оператор $\Pi(db) = \varphi_b \varphi_b^* db$ удовлетворяет условию нормировки $\int \Pi(db) = 1$. Действительно, пользуясь представлением $\Psi_0 \Psi_0^* = Ne^{-a^+ a}$ (символ $N$ показывает, что в разложении экспоненты в ряд операторы $a^*$ стоят слева от операторов $a$), представим $\Pi(db)$ в виде

$$\Pi(db) = \pi^{-s} N e^{-(a-b)^+(a-b)} db,$$

откуда его нормированность становится очевидной.

### Оптимальность идеального квазиизмерения в гауссовском случае

Пусть априорное распределение входного сигнала $x$ имеет гауссовский вид

$$P(dx) = \frac{1}{\det 2\pi K} \exp\left\{-\frac{1}{2} x^+ K^{-1} x\right\} dx, \tag{20}$$

где $x^+ = (x_1^*, \ldots, x_s^*)$ — комплексный вектор, $K$ — корреляционная матрица переменных $x$, и пусть функция штрафов квадратична

$$c(x, u) = (x-u)^+ (x-u), \tag{21}$$

($u^+ = (u_1^*, \ldots, u_s^*)$ — оценка параметров $x$).

Гауссовскую матрицу плотности $\rho(x)$ удобно записать в виде следующего нормально упорядоченного выражения:

$$\rho(x) = \frac{1}{\det 2L} N \exp\left\{-\frac{1}{2}(a-x)^+ L^{-1}(a-x)\right\} \tag{22}$$

($L$ — числовая матрица).

Можно показать, что к такому виду может быть приведена любая гауссова матрица плотности $\rho = e^{\Gamma - x^{\tau} Qx}$, описывающая состояние набора эрмитовых повторно-коммутирующих операторов $x^{\tau} = (x_1, \ldots, x_n)$, где $Q$ — эрмитова положительно-определенная числовая матрица, $\Gamma$ — нормировочная константа.

Покажем, что в этом случае оптимальное идеальное квазиизмерение задается следующей функцией вида (19):

$$\varphi_u = \pi^{-s/2} \det S^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2} u^+ (S^{-1})^+ S^{-1} u + a^+ S^{-1} u\right\} \Psi_0, \tag{23}$$

где $S$ — числовая матрица, которую целесообразно выбрать по формуле (25).

Подставляя (20)—(22) в (9) и интегрируя по $x$, имеем

$$r(u) = \int (x-u)^+ (x-u) \frac{1}{\det 2\pi K} \exp\left\{-\frac{1}{2} x^+ K^{-1} x\right\} \frac{1}{\det 2L} \times$$
$$\times N \exp\left\{-\frac{1}{2}(a-x)^+ L^{-1}(a-x)\right\} dx = 2\rho \operatorname{tr} B + (u - Sa)^+ \rho (u - Sa), \tag{24}$$

где $B = (K^{-1} + L^{-1})^{-1}$;

$$\rho = \int \rho(x) P(dx) = \frac{1}{\det 2(K+L)} N \exp\left\{-\frac{1}{2} a^+ (K+L)^{-1} a\right\};$$

$$S = K(K+L)^{-1}, \tag{25}$$

а символ tr означает взятие следа только по числовым индексам.

Подставляя далее (24), (23) в (11) и интегрируя по $u$, найдем неопределенный оператор $\Lambda$:

$$\Lambda = \int [2\rho \operatorname{tr} B + (u - Sa)^+ \rho (u - Sa)] \times$$

$$\times \frac{\pi^{-s}}{\det S^{-2}} N \exp\{-(S^{-1}u - a)^+ (S^{-1}u - a)\} du = 2\rho \operatorname{tr} B. \tag{26}$$

При этом оператор (13) с учетом (24) и (26) примет вид

$$A(u) = (u - Sa)^+ \rho (u - Sa),$$

откуда, используя свойство функций (23)

$$a \varphi_u = S^{-1} u \varphi_u, \tag{27}$$

легко видеть, что $A(u)\varphi_n = 0$, т. е. функции (23) удовлетворяют уравнению оптимальности (12).

Нетрудно далее показать, что никакая другая функция $\psi_n$ не может сделать риск (8) меньше, чем функция (23). Для этого достаточно убедиться в справедливости неравенства

$$\int \varphi_u^* r(u) \varphi_u du \leqslant \int \psi_u^* r(u) \psi_u du, \tag{28}$$

где на функции $\psi_n$ наложено естественное условие нормированности

$$\int \psi_u \psi_u^* du = 1. \tag{29}$$

Подставляя (24) в (28) и учитывая (27), (29), получим неравенство

$$\int \psi_u^* (u - Sa)^+ \rho (u - Sa) \psi_n du \geqslant 0, \tag{30}$$

эквивалентное (28). Поскольку оператор $\rho$ положительно определен, то справедливость (30) и следовательно (28), очевидна. Таким образом, оптимальность функций (23) в гауссовском случае полностью доказана.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Хельстром К., Лиу Дж., Гордон Дж. Квантовомеханическая теория связи. В Трудах ИРЭ, т. 58, 1970, стр. 186—207.
2. Большаков И. А., Гуткин Л. С., Левин Б. Р., Стратонович Р. Л. Математические основы современной радиоэлектроники. М., 1969.



Поступила в редакцию
28.5 1973 г.



Кафедра
общей физики для мехмата