Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1976

УДК 532.517

В. А. ГОРОДЦОВ, В. С. ШАНДИН

О МОДЕЛЬНОМ ОПИСАНИИ ПРИСТЕНОЧНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматриваются различные модели колеблющегося вязкого подслоя. С помощью условий сшивания средних величин для вязкого подслоя и внешней турбулентности удается связать период колебаний с характеристиками жидкости и внешней турбулентности и хорошо описать распределение средней скорости вблизи стенки.

Трудности теории сдвиговой турбулентности, опирающейся только на уравнения Навье—Стокса, побуждают вводить упрощенные модельные представления, использующие лишь некоторые общие следствия уравнений и дополнительные физические гипотезы.

В соответствии с конкурирующим влиянием инерционных и вязких сил в пристеночном турбулентном потоке можно выделить две области, в каждой из которых преобладает один тип сил.

Вдали от границ ведущую роль играют нелинейные инерционные силы и турбулентность имеет развитый характер. Из-за нелинейности возникают большие теоретические трудности описания этой области, тем не менее некоторые важные черты выясняются с помощью анализа размерностей и соображений подобия [1]. В тех частях потока, где не существенна геометрия области течения, распределение скорости имеет универсальный вид

$$Au_* \ln (zu_*/\nu) + Bu_*, \tag{1}$$

здесь z — расстояние до стенки, ν — коэффициент кинематической вязкости, u_* — динамическая скорость, жидкость считается несжимаемой и используется система единиц измерения с плотностью жидкости, равной единице, A, B — численные коэффициенты, определяемые экспериментально. В литературе наиболее часто используются значения

$$A = 2{,}5, \quad B = 5{,}5. \tag{2}$$

Распределения пульсационных характеристик в этой же области являются однородными (но не изотропными).

Вблизи гладкой стенки преобладают линейные вязкие силы, течение ламинаризовано и большие возмущения редки. Благодаря этому возможно достаточно простое линеаризованное описание области вязкого подслоя.

В переходной зоне между этими областями влияние обоих типов сил соизмеримо и получение теоретических результатов затруднительно. Важным результатом экспериментальных исследований последних лет [2—8] является выяснение активной роли переходной зоны в порождении турбулентности. Установлено, что здесь довольно регулярно происходят срывы плавного течения и взрывное порождение большей части турбулентных возмущений, проникающих как во внешнюю область, так и к стенке. Под влиянием этого течение в области вязкого подслоя приобретает нестационарный колебательный характер.

В обсуждаемых ниже моделях поток делится на внешнюю и внутреннюю области. Характеристики внешней турбулентности предполагаем известными, решается задача о нестационарном течении во внутреннем вязком подслое, толщиной переходной зоны пренебрегаем, а ее роль косвенно учитывается путем рассмотрения колебаний вязкого подслоя и условий сращивания средних характеристик обеих областей.

В обсуждаемых простейших моделях пренебрегаем деталями трехмерного течения в вязком подслое, а «взрывы» плавного течения считаем мгновенными. При этом уравнения Навье—Стокса сводятся к одному линейному уравнению для продольного компонента скорости

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

а роль «взрывов» сводится к скачкообразному восстановлению начальных условий.

Модель регулярных колебаний вязкого подслоя

Исходным предположением модели колеблющегося вязкого подслоя, предложенной в работах [2, 9], является регулярность колебаний с постоянным периодом T.

Считая, что при «взрывах» благодаря интенсивному перемешиванию жидкости формируется плоский профиль скорости вблизи стенки, и пренебрегая для простоты влиянием градиента давления, приходим к начальной задаче

$$\frac{\partial u^+}{\partial t^+} = \frac{\partial^2 u^+}{\partial z^{+2}}, \quad |u^+| < \infty, \tag{3}$$

$$u^+(z^+, 0) = U^+, \; u^+(0, t^+) = 0.$$

Здесь введены безразмерные переменные $u^+ = u/u_*$,

$$z^+ = zu_*/\nu, \quad t^+ = tu_*^2/\nu, \quad U^+ = U/u_*,$$

которые используются в дальнейшем (крестик для простоты будет опускаться).

Решение этой задачи выражается через интеграл вероятности

$$u(z, t) = U \operatorname{erf} \zeta \equiv \frac{2U}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\zeta} e^{-x^2} dx, \quad \zeta \equiv \frac{z}{2\sqrt{t}}, \tag{4}$$

а вязкие напряжения экспоненциально затухают с удалением от стенки

$$\sigma(z, t) = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{U}{\sqrt{\pi t}} e^{-\zeta^2}. \tag{5}$$

При регулярном повторении такого течения средние величины определяются интегрированием по одному периоду колебаний:

$$\overline{f(z)} = \frac{1}{T}\int_0^T f(z, t)\, dt$$

и, как нетрудно убедиться, также выражаются через интеграл вероятности

$$\overline{u(z)}/U = \operatorname{erf}\xi + \frac{2\xi}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} - 2\xi^2 \operatorname{erfc}\xi, \tag{6}$$

$$\overline{\sigma(z)} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{2U}{\sqrt{\pi T}}[e^{-\xi^2} - \sqrt{\pi}\,\xi \operatorname{erfc}\xi]. \tag{7}$$

Здесь и далее используются обозначения $\xi = z/(2\sqrt{T})$,

$$\operatorname{erfc}\xi = 1 - \operatorname{erf}\xi.$$

Полученные распределения зависят от двух неизвестных числовых параметров T и U. Используя некоторые правдоподобные условия сращивания средних характеристик вязкого подслоя (6), (7) со средними типа (1), можно выразить эти параметры через характеристики внешней турбулентности A и B.

Предположим, что распределение (6) гладко переходит в распределение (1), т. е. существует такая точка z_0, в которой функции (1), (6) и их первые производные имеют равные значения

$$A \ln z_0 + B = \overline{u(z_0)}, \tag{8}$$

$$A/z_0 = \overline{\sigma(z_0)}. \tag{9}$$

К этим соотношениям добавляется формула

$$2U = \sqrt{\pi T} \tag{10}$$

как следствие того, что турбулентные напряжения Рейнольдса на стенке ($z=0$) исчезают и остаются лишь вязкие напряжения (7), для которых в безразмерных переменных $\overline{\sigma(0)} = 1$.

В итоге получаем систему трех уравнений (8)—(10) для трех искомых величин T, U и z_0. Выбирая для A и B значения из (2), получим

$$z_0 \approx 39,\ \sqrt{T} \approx 18,\ U \approx 16,\ \xi_0 \approx 1{,}1. \tag{11}$$

Предположение о гладком сращивании средних характеристик можно заменить другими условиями сшивания в другой характерной точке z_{00}. Определим z_{00} как точку пересечения внешней асимптотической зависимости (1) и внутреннего линейного распределения, имеющего место вблизи стенки согласно (7) и (10)

$$z_{00} = A \ln z_{00} + B. \tag{12}$$

Как известно [1], в этой точке вязкое напряжение близко турбулентному сдвиговому напряжению Рейнольдса τ. Последнее в слое постоянного напряжения, в который попадают вязкий подслой и внешняя турбулентность со средним распределением (1), просто выражается через вязкое напряжение и напряжение на стенке $\overline{\sigma(0)} = 1$: $\overline{\sigma(z)} + |\tau(z)| = 1$. Поэтому в точке z_{00}

$$\sigma(z_{00}) = C, \tag{13}$$

причем C близко к $^1/_2$. Предполагая $C = ^1/_2$, из уравнений (10), (12) и (13) находим

$$z_{00} \approx 11{,}6, \ \sqrt{T} \approx 16{,}6, \ U \approx 14{,}7, \ \xi_{00} \approx 0{,}35. \tag{14}$$

Из сравнения (11) и (14) видим, что, несмотря на различие условий сшивания, результаты для $\sqrt{T}$ и U оказались близкими.

Колебания течения в вязком подслое приводят к большим пульсациям продольного компонента скорости. Оценим среднеквадратичную величину только этих пульсаций, считая их не зависящими от пульсаций, рождаемых при «взрывах». Для таких пульсаций, используя (4)—(6), получаем

$$\overline{(u - \overline{u})^2}/U^2 = \operatorname{erf}^2 \xi + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \xi e^{-\xi^2} \operatorname{erf} \xi -$$

$$- 2\xi^2 (1 - \operatorname{erf}^2 \xi) - \frac{4}{\pi} \xi^2 Ei(-2\xi^2) - (\overline{u}/U)^2. \tag{15}$$

Здесь обозначение Ei $(-2\xi^2)$ использовано для интегральной показательной функции

$$Ei(-2\xi^2) = \int\limits_{\infty}^{2\xi^2} \frac{e^{-x}}{x} dx.$$

Через эту функцию выражается и среднеквадратичная величина пульсаций вязких напряжений

$$\overline{(\sigma - \overline{\sigma})^2} = -\frac{U^2}{\pi T} Ei(-2\xi^2) - (\overline{\sigma})^2.$$

Эта величина имеет также физический смысл диссипации пульсационной энергии, связанной с флуктуациями скорости (15).

Модель случайных «взрывов»

Простейшей моделью с нерегулярными колебаниями вязкого подслоя будет такая модель, в которой «взрывы» происходят в случайные моменты времени независимо друг от друга, и при этом колебания представляют собой пуассоновский случайный процесс, а средние находятся с помощью преобразования Лапласа:

$$\langle f(z) \rangle = \frac{1}{T} \int\limits_0^{\infty} e^{-t/T} f(z, t)\, dt. \tag{16}$$

Такая модель для описания вязкого подслоя и подслоя вблизи поверхности раздела газ — жидкость была введена в работах [10, 11].

Для определения средних характеристик достаточно применить преобразование Лапласа к функциям (4) и (5). С другой стороны, применив преобразование Лапласа непосредственно к исходным уравнениям, получим для средней скорости

$$T \frac{d^2}{dz^2} \langle u \rangle = \langle u \rangle - U + T \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x},$$

$$\langle u(0)\rangle = 0, \quad |\langle u\rangle| < \infty.$$

Решение этой задачи при не зависящем от z перепаде давления, который для сокращения можно включить в U, имеет вид

$$\langle u\rangle = U(1 - e^{-2\xi})$$

и соответственно

$$\langle \sigma\rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial z}\right\rangle = \frac{U}{\sqrt{T}}\, e^{-2\xi}.$$

Условие обращения в нуль напряжений Рейнольдса на стенке, эквивалентное $\langle\sigma(0)\rangle = 1$, приводит к формуле (ср. соотношение (10))

$$U = \sqrt{T}. \tag{17}$$

Условия гладкого сращивания распределений внешней турбулентности и вязкого подслоя принимают в такой модели простой вид

$$A \ln z_0 + B = U(1 - e^{-2\xi_0}),$$

$$A/z_0 = \frac{U}{\sqrt{T}}\, e^{-2\xi_0}$$

и вместе с (17) при значениях A, B из (2) дают

$$z_0 = 46{,}8, \ \sqrt{T} = U \approx 16{,}0. \tag{18}$$

Следующие два примера иллюстрируют влияние изменения величины B на параметры T и z_0:

$$B = 5{,}1: \quad z_0 \approx 44{,}5, \quad \sqrt{T} \approx 15{,}5,$$

$$B = 5{,}8: \quad z_0 \approx 48{,}5, \quad \sqrt{T} \approx 16{,}3. \tag{19}$$

Для этих трех наборов (см. также (18)) соотношения типа (12) и (13) и приводят к значениям

$$C \approx 0{,}483; \quad 0{,}487 \quad \text{и} \quad 0{,}479.$$

A	B	z_{00}	$\sqrt{T}$			z^0			$\langle\sigma(z^0)\rangle$		
			$C=0{,}49$	0,50	0,51	$C=0{,}49$	0,50	0,51	$C=0{,}49$	0,50	0,51
2,5	4,9	10,9	15,2	15,7	16,1	39,5	30,7	27,3	0,075	0,141	0,184
	5,0	11,0	15,4	15,9	16,3	37,6	30,5	27,4	0,087	0,146	0,187
	5,1	11,1	15,6	16,1	16,5	36,6	30,4	27,4	0,096	0,150	0,190
	5,2	11,25	15,8	16,2	16,7	35,9	30,4	27,5	0,103	0,154	0,193
	5,3	11,4	16,0	16,4	16,9	35,4	30,35	27,6	0,109	0,158	0,196
	5,4	11,5	16,1	16,6	17,1	35,0	30,3	27,6	0,114	0,161	0,199
	5,5	11,6	16,3	16,8	17,3	34,7	30,3	27,7	0,119	0,164	0,201
	5,6	11,8	16,5	17,0	17,5	34,5	30,35	27,8	0,124	0,167	0,204
	5,7	11,9	16,7	17,1	17,7	34,3	30,4	27,9	0,128	0,170	0,206
	5,8	12,0	16,8	17,3	17,8	34,2	30,4	28,0	0,132	0,173	0,208
2,44	4,9	10,7	15,0	15,4	15,9	37,3	29,9	26,7	0,083	0,144	0,186
	5,5	11,5	16,1	16,5	17,0	33,1	29,6	27,1	0,123	0,166	0,203
2,4	5,5	11,3	15,9	16,3	16,8	33,0	29,1	26,7	0,125	0,168	0,209
	5,8	11,7	16,4	16,9	17,4	32,7	29,3	27,0	0,136	0,176	0,211

Если же выбрать за исходные условия сшивания соотношения типа (12) и (13), задавая величины A, B и C:

$$A \ln z_{00} + B = z_{00}, \quad e^{-z_{00}/\sqrt{T}} = C,$$

то для z_{00} и $\sqrt{T}$ получим значения, приведенные в таблице. Наряду с ними в таблице приведены z^0 и $\langle\sigma(z^0)\rangle$, определяемые по формулам

$$A \ln z^0 + B = \sqrt{T}\,(1 - e^{-z^0/\sqrt{T}}),$$

$$\langle\sigma(z^0)\rangle = e^{-z^0/\sqrt{T}}.$$

Из таблицы видно, что $\sqrt{T}$ меняется не сильно при переходе от одного обычно используемого [1] набора значений A и B к другому. Кроме того, табличные значения не сильно отличаются от тех, которые приведены в (11), (14), (18) и (19).

Модель с логарифмическим начальным распределением скорости

Можно таким образом изменить постановку задачи, чтобы она не содержала вообще произвольного параметра U. Действительно, предположим, что при «взрывном» перемешивании устанавливается логарифмическое распределение (1) вплоть до непосредственной окрестности стенки. Задача о вязком торможении такого начального распределения в вязком подслое

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\\ u(0, t) = 0, \quad u(z, 0) = A \ln z + B,\\ u \xrightarrow[z\to\infty]{} A \ln z + B\end{gathered} \tag{20}$$

ранее была рассмотрена в работах [12—15] в предположении о регулярности колебаний вязкого подслоя. В таком предположении были найдены распределения средних и пульсационных величин.

Если предположить, что процесс колебаний является пуассоновским случайным процессом со средними характеристиками, определяемыми по формуле (16), то из (20) для таких средних получим

$$T \frac{d^2}{dz^2}\langle u\rangle = \langle u\rangle - (A \ln z + B),$$

$$\langle u(0)\rangle = 0, \quad \langle u(z)\rangle \xrightarrow[z\to\infty]{} A \ln z + B.$$

Решение этой задачи для $\langle u(z)\rangle$, а также соответствующие выражения для $\langle\sigma(z)\rangle$ имеют вид

$$\langle u\rangle = A \ln z + B - [B + A \ln(\sqrt{T}/\gamma)]\,e^{-2\xi} - \\ - \frac{1}{2} A [e^{2\xi} Ei(-2\xi) + e^{-2\xi} Ei(2\xi)],$$

$$\langle\sigma\rangle = \left[\frac{B}{\sqrt{T}} + \frac{A}{\sqrt{T}} \ln(\sqrt{T}/\gamma)\right] e^{-2\xi} + \\ + \frac{A}{2\sqrt{T}} [e^{-2\xi} Ei(2\xi) - e^{2\xi} Ei(-2\xi)].$$

Здесь $\xi = z/(2\sqrt{T})$, $\gamma = \exp C \approx 1{,}781$, C — постоянная Эйлера.

Условие $<\sigma(0)>=1$ в данном случае приводит к соотношению

$$B+A\ln(\sqrt{T}/\gamma)=\sqrt{T},$$

которое дает

$$A=2{,}5,\quad B=5{,}5:\sqrt{T}\approx 9{,}75;$$

$$A=2{,}5,\quad B=5{,}1:\sqrt{T}\approx 9{,}4.$$

Логарифмическое начальное распределение в (20) обладает тем недостатком, что имеет бесконечный скачок в окрестности стенки (к тому же отрицательно при $z\ll 1$). Однако наличие такой особенности[1] не оказывает существенного влияния на осредненные характеристики и такие величины, как $\sqrt{T}$. Действительно, сгладим скачок, введя параметр a, следующим образом:

$$u(z,0)=A\ln(z+a)+B,\quad A\ln a+B=0. \tag{21}$$

При этом функция $u(z, 0)$ обращается в нуль на стенде и стремится к функции (1) при больших z. Формулу для средней скорости можно записать в виде

$$\langle u\rangle=A\ln(z+a)+B-Ae^{a/\sqrt{T}}\,Ei(-a/\sqrt{T})\,\mathrm{sh}(z/\sqrt{T})+$$
$$+\frac{1}{2}Ae^{(z+a)/\sqrt{T}}\left\{Ei\left(-\frac{a}{\sqrt{T}}\right)-Ei\left(-\frac{z+a}{\sqrt{T}}\right)\right\}+$$
$$+\frac{1}{2}Ae^{-(z+a)/\sqrt{T}}\left\{Ei\left(\frac{a}{\sqrt{T}}\right)-Ei\left(\frac{z+a}{\sqrt{T}}\right)\right\}.$$

Условие на стенке $<\sigma(0)>=1$ тогда запишется следующим образом:

$$\frac{A}{\sqrt{T}}e^{a/\sqrt{T}}\,Ei\left(-\frac{a}{\sqrt{T}}\right)+1=0. \tag{22}$$

Из (21), (22) получаем

$$A=2{,}5,\quad B=5{,}5:a\approx 0{,}11,\quad \sqrt{T}\approx 10.$$

Полученные в этом пункте значения периода колебаний вязкого подслоя уже существенно ниже, чем в предыдущих пунктах, хотя порядок величины тот же.

Рассмотренные различные одномерные модели позволяют приближенно описать распределения средней скорости в области вязкого подслоя и переходной зоны, а также связать средний период колебаний вязкого подслоя с характеристиками внешней турбулентности. Использованные условия сращивания средних характеристик приводят к однозначным выводам о зависимости периода от свойств жидкости и характеристик течения (далее в размерных переменных)

$$T=p\frac{\nu}{u_*^2},\quad p\approx 100-400. \tag{23}$$

Следует заметить, что при учете зависимости параметров A, B от числа Рейнольдса величина p будет также функцией числа Рейнольдса (см. табл.).

[1] Это верно и для конечного скачка в задаче (3).

Обсуждение зависимости периода колебаний T от характеристик потока имеется в цитированной литературе, а также в специальной заметке [16]. Порядок величины $\sqrt{T}$, найденной разными исследователями, совпадает с тем, что дает формула (23). Теоретически найденное значение параметра T было проверено также на материале натурных наблюдений, выполненных в процессе исследования подледного течения озера Байкал [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., 1965.
2. Einstein H. A., Li H. «Proc. ASCE, IEMD», 82, N 945, 1956.
3. Kline S. J., Runstadler P. W. «Trans ASME», E26, 166, 1959.
4. Kline S. J. et. al. «J. Fluid Mech.», 30, 741, 1967; «Механика», № 4, 41, 1969.
5. Corino E. R., Brodkey R. S. «J. Fluid Mech.», 37, 1, 1969; «Механика», № 1, 56, 1971.
6. Meek R. L., Baer A. D. «AIChE Jour.», 16, 841, 1970.
7. Laufer J., Naraynan M. «Phys. Fluids», 14, 182, 1971.
8. Speranskaya A. A., Anisimova E. P. Turbulence in stratified flows. Internation Symposium on stratified flows (Novosibirsk, 1972). N. Y., 1973.
9. Hanratty T. J. «AIChE Jour.», 2, 359, 1956.
10. Danckwerts P. V. «Ind Eng. Chem.», 43, N 6, 1951.
11. Danckwerts P. V. «AIChE Jour.», 1, 456, 1955.
12. Блек Т. И. Достижения в области теплообмена. М., 1970.
13. Black T. I. «AIAA Paper», N 68, 42, 1968.
14. Black T. I. NASA, CR—888, 1968.
15. Black T. I. Viscous drag reduction. Ed. Wells C. S., Plenum Press, 383, 1969.
16. Meek R. L. «AIChE Jour.», 13, 854, 1972.

Поступила в редакцию
16.4 1974 г.

Кафедра
физики моря и вод суши