Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1976

УДК 539.2.01

$\boxed{\text{А. А. ВЛАСОВ}}$, Н. Г. ИНОЗЕМЦЕВА

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЧЕТЫРЕХ ТИПОВ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КРИСТАЛЛА

Показано, что статистическая модель кристалла допускает существование различных типов акустических волн. Определены их физические характеристики; обсуждаются возможности экспериментального обнаружения нового типа волн.

Введение

Вопрос о распространении акустических волн в статистической модели кристалла [1—2] изучался в работах [3—4], которые посвящены разработке теории продольных волн в этой модели. В настоящей работе показано, что учет свойств симметрии кристаллической решетки и кинетического уравнения, предложенного в [1], а также нелокальных особенностей его решений позволяет сделать вывод о существовании в этой модели четырех типов акустических волн.

Исходное кинетическое уравнение модели имеет следующий вид [1]:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{r},\ \mathbf{v},\ t)+\mathbf{v}\,\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}-\frac{1}{m}\,\frac{\partial V\{f\}}{\partial \mathbf{r}}\,\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}=0, \tag{1}$$

$$V\{f\}=\int K(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,f(\mathbf{r}',\ \mathbf{v}',\ t)\,d\mathbf{r}'d\mathbf{v}',$$

где m — масса атома кристалла, $K(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ — потенциал парного взаимодействия атомов, $f(\mathbf{r},\ \mathbf{v},\ \mathbf{t})$ — функция распределения, описывающая поведение атомов в кристалле. Стационарные и температурные решения в условиях кристаллического состояния выводятся из уравнения (1) при $\frac{\partial f}{\partial t}=0$ и $f(\mathbf{r},\ \mathbf{v})=\rho(\mathbf{r})f_M(\mathbf{v}^2)$, причем температура получается как параметр разделения переменных.

Будем рассматривать случай акустических волн малой амплитуды (линейное приближение):

$$f=f_0(\mathbf{r},\ \mathbf{v})+\varphi(\mathbf{r},\ \mathbf{v},\ t),\quad |\varphi|\ll f_0, \tag{2}$$

где $f_0=\rho(\mathbf{r})f_M(\mathbf{v}^2)$ — функция распределения в отсутствие звуковых волн, $\rho(\mathbf{r})$ воспроизводит периодическую структуру кристалла, $f_M(\mathbf{v}^2)$ — максвелловская функция распределения по скоростям. Для возмущения φ имеем уравнение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{r}} - \frac{1}{m}\frac{\partial V\{\varphi\}}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} - \frac{1}{m}\frac{\partial V\{f_0\}}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{v}} = 0. \qquad (3)$$

В [4] показано, что в предположении о малости пространственных изменений в звуковом поле по сравнению с микронеоднородностями кристалла последним членом в уравнении (3) можно пренебречь. В дальнейшем будем рассматривать уравнение (3) без последнего члена.

Будем искать решение уравнения (3) в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = e^{-i\mathbf{kr}}\sum_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{nar}} b_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}, t), \qquad (4)$$

где

$$\mathbf{na} = \left\{\frac{2\pi}{d_1}n_x, \quad \frac{2\pi}{d_2}n_y, \quad \frac{2\pi}{d_3}n_z\right\};$$

d_1, d_2, d_3 — периоды кристаллической решетки по осям x, y, z; n_x, n_y, n_z пробегают все целочисленные значения. Учитывая, что разложение $\rho(\mathbf{r})$ в ряд Фурье имеет вид

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{nar}} a_{\mathbf{n}},$$

$$a_{\mathbf{n}} = \left(\int_{(d_1 d_2 d_3)} \rho(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}\right)\frac{1}{d_1 d_2 d_3}\exp\left\{-2\pi^2\theta\left[\frac{n_x^2}{d_1^2 V_{11}} + \frac{n_y^2}{d_2^2 V_{22}} + \frac{n_z^2}{d_3^2 V_{33}}\right]\right\},$$

$$V_{ii} = \left(\int_{(d_1 d_2 d_3)} \rho(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}\right)\sum_{\mathbf{n}}{}' K_{ii}(\mathbf{nd}),$$

$$\mathbf{nd} = (n_x d_1,\ n_y d_2,\ n_z d_3), \quad K_{ii}(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2 K(|\mathbf{r}|)}{\partial x_i^2},$$

получим для $b_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}, t)$ систему уравнений

$$\frac{\partial b_{\mathbf{n}}}{\partial t}(\mathbf{v}, t) + i(\mathbf{na} - \mathbf{k})\mathbf{v} b_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}, t) - \frac{i}{m}\sum_{l} a_{\mathbf{n}-\mathbf{e}}\sigma(\mathbf{la} - \mathbf{k}),$$

$$(\mathbf{la} - \mathbf{k})\frac{\partial f_M}{\partial \mathbf{v}}\int b_{\mathbf{l}}(\mathbf{v}', t)\, d\mathbf{v}' = 0, \qquad (5)$$

$$\sigma(\mathbf{la} - \mathbf{k}) = \int K(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{la}-\mathbf{k})\mathbf{r}} d\mathbf{r}.$$

Применяя к системе (5) преобразование Лапласа по времени, можно получить систему алгебраических уравнений

$$B_{\mathbf{n}}(p) = \int e^{pt} dt \int b_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v}, \qquad (6)$$

$$B_{\mathbf{n}}(p) = \frac{2}{\theta}\sum_{\mathbf{l}} a_{\mathbf{n}-\mathbf{l}}\sigma(\mathbf{la} - \mathbf{k})\frac{(\mathbf{la} - \mathbf{k})(\mathbf{na} - \mathbf{k})}{(\mathbf{na} - \mathbf{k})^2} I\left(\frac{\Omega}{|\mathbf{na} - \mathbf{k}|}\right) B_{\mathbf{l}}(p), \qquad (7)$$

$$I(\nu) = -\int_0^\infty x e^{-x^2}\cos(\nu x)\, dx; \quad p = i\omega + \gamma, \quad \gamma \ll \omega;$$

$$\Omega = \omega\sqrt{\frac{2m}{\theta}}.$$

В дальнейшем будем рассматривать свойства решений системы (7). Нетривиальное решение имеет место лишь при обращении в нуль определителя системы:

$$\Delta(\mathbf{k},\ p)=\left|\delta_{\mathbf{n}l}-\frac{2}{\theta}a_{\mathbf{n}-1}\frac{(l\mathbf{a}-\mathbf{k})(\mathbf{n}\mathbf{a}-\mathbf{k})}{(\mathbf{n}\mathbf{a}-\mathbf{k})^2}\sigma(l\mathbf{a}-\mathbf{k})I\left(\frac{\Omega}{|\mathbf{n}\mathbf{a}-\mathbf{k}|}\right)\right|=0. \tag{8}$$

Условие (8) представляет собой дисперсионное уравнение в данной модели.

§ 1. Существование и дисперсионные уравнения различных типов акустических волн

Для статистического акустического поля характерны: нелокальность — рассредоточенность атома по всему объему ячейки кристалла и анизотропия структуры облака вероятности местоположения атомов, описывающего акустическое поле внутри элементарной ячейки. Эту анизотропную структуру облака вероятности естественно описывать первыми моментами от функции распределения $\varphi(\mathbf{r},\ \mathbf{v},\ t)$:

$$\int\limits_{(d_1d_2d_3)} d\mathbf{r}\int d\mathbf{v}A\varphi(\mathbf{r},\ \mathbf{v},\ t),\quad A=\{1;\ \mathbf{r};\ \mathbf{v};\ [\mathbf{r}\mathbf{v}]\}. \tag{9}$$

Пусть акустическая волна распространяется вдоль одного из ребер ячейки кристалла (например, оси x). Простейшие крайние случаи анизотропии облака могут быть представлены следующими пространственными моментами:

$$\Delta X(t)=\int\limits_{(d_1d_2d_3)} xd\mathbf{r}\int\varphi d\mathbf{v}\neq 0;\quad \Delta Y(t)=\Delta Z(t)=0,$$

$$\Delta Y(t)\neq 0;\quad \Delta X(t)=\Delta Z(t)=0,$$

$$\Delta Z(t)\neq 0;\quad \Delta X(t)=\Delta Y(t)=0,$$

$$\Delta X(t)=\Delta Y(t)=\Delta Z(t)=0;\quad \int\limits_{(d_1d_2d_3)} d\mathbf{r}\int[\mathbf{r}\mathbf{v}]_x\varphi d\mathbf{v}\neq 0. \tag{10}$$

Осуществление указанных случаев и их независимость вытекают из решения (4); легко увидеть, что выражения для $\Delta X(t)$, $\Delta Y(t)$ и $\Delta Z(t)$, неравные нулю, определяются непересекающимися группами членов:

$$B_{n_100},\quad B_{n_1n_20\,(n_2=0)}\ \text{и}\ B_{n,0n_3\,(n_3\neq 0)}.$$

Таким образом, имеют место одна продольная, две поперечные и одна акустическая волна, связанная с изменением момента количества движения ячеек кристалла в направлении вдоль волнового вектора.

Разрешим систему (7) с целью выделения указанных независимых групп коэффициентов $B_{n_1n_2n_3}$. Систему координат сохраним прежней. Исходное уравнение (3) инвариантно относительно следующих преобразований:

$$y\to -y,\quad v_y\to -v_y;\quad z\to z,\quad v_z\to v_z,$$

$$y\to y,\quad v_y\to v_y;\quad z\to -z,\quad v_z\to -v_z,$$

$$y\to -y,\quad v_y\to -v_y;\quad z\to -z,\quad v_z\to -v_z. \tag{11}$$

Выясним следствия этой симметрии для системы (7) и дисперсионного уравнения (8).

Разобьем совокупность величин $B_{\mathbf{n}}(p)$, $-\infty<n_x, n_y, n_z<\infty$, на четыре непересекающиеся группы:

$$\begin{aligned}
&B_{\mathbf{n}_1}, \quad \mathbf{n}_1=(n_x, n_y, n_z), \quad n_y\geqslant 0, \quad n_z\geqslant 0;\\
&B_{\mathbf{n}_2}, \quad \mathbf{n}_2=(n_x, -n_y, n_z), \quad n_y> 0, \quad n_z\geqslant 0;\\
&B_{\mathbf{n}_3}, \quad \mathbf{n}_3=(n_x, n_y, -n_z), \quad n_y\geqslant 0, \quad n_z> 0;\\
&B_{\mathbf{n}_4}, \quad \mathbf{n}_4=(n_x, -n_y, -n_z), \quad n_y> 0, \quad n_z> 0;
\end{aligned} \tag{12}$$

и перейдем к новым неизвестным $C_{\mathbf{n}}^{ss}$, $C_{\mathbf{n}}^{sa}$, $C_{\mathbf{n}}^{as}$, $C_{\mathbf{n}}^{aa}$:

$$\begin{aligned}
&C_{\mathbf{n}}^{ss}=B_{\mathbf{n}_1}+B_{\mathbf{n}_2}+B_{\mathbf{n}_3}+B_{\mathbf{n}_4}, \quad n_y\geqslant 0, \quad n_z\geqslant 0;\\
&C_{\mathbf{n}}^{as}=B_{\mathbf{n}_1}-B_{\mathbf{n}_2}+B_{\mathbf{n}_3}-B_{\mathbf{n}_4}, \quad n_y> 0, \quad n_z\geqslant 0;\\
&C_{\mathbf{n}}^{sa}=B_{\mathbf{n}_1}+B_{\mathbf{n}_2}-B_{\mathbf{n}_3}-B_{\mathbf{n}_4}, \quad n_y\geqslant 0, \quad n_z> 0;\\
&C_{\mathbf{n}}^{aa}=B_{\mathbf{n}_1}-B_{\mathbf{n}_2}-B_{\mathbf{n}_3}+B_{\mathbf{n}_4}, \quad n_y> 0, \quad n_z> 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Если n_y либо n_z равны нулю, то те из $B_{\mathbf{n}_2}$, $B_{\mathbf{n}_3}$ и $B_{\mathbf{n}_4}$, которые не определены при таких значениях n_y и n_z, в суммы (13) не входят.

Используя очевидные свойства симметрии коэффициентов системы (7) (вытекающие из симметрии исходного уравнения (3)), легко показать, что она сводится к четырем независимым системам уравнений для величин $C_{\mathbf{n}}^{ss}$, $C_{\mathbf{n}}^{as}$, $C_{\mathbf{n}}^{sa}$, $C_{\mathbf{n}}^{aa}$, т. е. преобразование (13) приводит ее к квазидиагональному виду. Определитель (8) представляет собой произведение определителей этих систем. Явные выражения для этих систем таковы:

$$C_{\mathbf{n}}^{ss}=\sum_{\mathbf{l}} A(\mathbf{n}, \mathbf{l})\, C_{\mathbf{l}}^{ss},$$

$$A(\mathbf{n}, \mathbf{l})=\frac{2}{\theta}\sigma(\mathbf{la}-\mathbf{k})\, I\left(\frac{\Omega}{|\mathbf{na}-\mathbf{k}|}\right)\frac{(\mathbf{la}-\mathbf{k})}{(\mathbf{na}-\mathbf{k})^2}\,[a_{\mathbf{n}_1-1}(\mathbf{na}_1-\mathbf{k})+$$

$$+a_{\mathbf{n}_2-1}(\mathbf{na}_2-\mathbf{k})+a_{\mathbf{n}_3-1}(\mathbf{na}_3-\mathbf{k})+a_{\mathbf{n}_4-1}(\mathbf{na}_4-\mathbf{k})],$$

$$C_{\mathbf{n}}^{sa}=\sum_{\mathbf{l}'} D(\mathbf{n}, \mathbf{l})\, C_{\mathbf{l}}^{sa},$$

$$D(\mathbf{n}, \mathbf{l})=\frac{2}{\theta}\sigma(\mathbf{la}-\mathbf{k})\, I\left(\frac{\Omega}{|\mathbf{na}-\mathbf{k}|}\right)\frac{(\mathbf{la}-\mathbf{k})}{(\mathbf{na}-\mathbf{k})^2}\,[a_{\mathbf{n}_1-1}(\mathbf{na}_1-\mathbf{k})+$$

$$+a_{\mathbf{n}_2-1}(\mathbf{na}_2-\mathbf{k})-a_{\mathbf{n}_3-1}(\mathbf{na}_3-\mathbf{k})-a_{\mathbf{n}_4-1}(\mathbf{na}_4-\mathbf{k})],$$

$$C_{\mathbf{n}}^{as}=\sum_{\mathbf{l}'} E(\mathbf{n}, \mathbf{l})\, C_{\mathbf{l}}^{as},$$

$$E(\mathbf{n}, \mathbf{l})=\frac{2}{\theta}\sigma(\mathbf{la}-\mathbf{k})\, I\left(\frac{\Omega}{|\mathbf{na}-\mathbf{k}|}\right)\frac{(\mathbf{la}-\mathbf{k})}{(\mathbf{na}-\mathbf{k})^2}\,[a_{\mathbf{n}_1-1}(\mathbf{na}_1-\mathbf{k})-$$

$$-a_{\mathbf{n}_2}-\mathbf{l}(\mathbf{na}_2-\mathbf{k})+a_{\mathbf{n}_3-1}(\mathbf{na}_3-\mathbf{k})-a_{\mathbf{n}_4-1}(\mathbf{na}_4-\mathbf{k})],$$

$$C_{\mathbf{n}}^{aa}=\sum_{\mathbf{l}} F(\mathbf{n}, \mathbf{l})\, C_{\mathbf{l}}^{aa},$$

$$F(\mathbf{n},\ \mathbf{l}) = \frac{2}{\theta}\sigma(\mathbf{la}-\mathbf{k})\, I\left(\frac{\Omega}{|n\mathbf{a}-\mathbf{k}|}\right)\frac{(\mathbf{la}-\mathbf{k})}{(n\mathbf{a}-\mathbf{k})^2}\,[a_{\mathbf{n}_1-\mathbf{l}}(n\mathbf{a}_1-\mathbf{k})-$$

$$-a_{\mathbf{n}_2-\mathbf{l}}(n\mathbf{a}_2-\mathbf{k})-a_{\mathbf{n}_3-\mathbf{l}}(n\mathbf{a}_3-\mathbf{k})+a_{\mathbf{n}_4-\mathbf{l}}(n\mathbf{a}_4-\mathbf{k})].$$

Отметим, что в пространственно-однородной среде ($\rho(\mathbf{r}) = \text{const}$) остаются только продольные волны.

Условие существования нетривиального решения системы (7) может быть представлено в следующем виде:

$$|\delta_n \mathbf{l} - A(n,\ \mathbf{l})| \times |\delta_n \mathbf{l} - D(n,\ \mathbf{l})| \times |\delta_n \mathbf{l} - E(n,\ \mathbf{l})| \times |\delta_n \mathbf{l} - F(n,\ \mathbf{l})| = 0$$

и выполняется при равенстве нулю хотя бы одного из четырех сомножителей.

Таким образом, простейшие крайние случаи анизотропии акустического поля и соответствующие свойства симметрии уравнения (3) позволяют сделать вывод о существовании в данной модели четырех типов акустических волн, соответствующих нетривиальным решениям систем (14). Величины $B_\mathbf{n}$ и, следовательно, звуковое поле $\varphi(\mathbf{r},\ \mathbf{v},\ t)$ могут быть получены из этих решений преобразованием, обратным (13). Дисперсионные уравнения для различных типов волн таковы:

$$\begin{aligned}
&|\delta\mathbf{n}\mathbf{l} - A(\mathbf{n},\ \mathbf{l})| = 0,\\
&|\delta\mathbf{n}\mathbf{l} - D(n,\ l)| = 0,\\
&|\delta\mathbf{n}\mathbf{l} - E(\mathbf{n},\ \mathbf{l})| = 0,\\
&|\delta\mathbf{n}\mathbf{l} - F(\mathbf{n},\ \mathbf{l})| = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Пусть выполнено первое условие (15). Тогда $C_\mathbf{n}^{ss} \neq 0$; $C_\mathbf{n}^{sa} = C_\mathbf{n}^{as} = C_\mathbf{n}^{aa} = 0$ и, следовательно,

$$B_{\mathbf{n}_1} = B_{\mathbf{n}_2} = B_{\mathbf{n}_3} = B_{\mathbf{n}_4}. \tag{16а}$$

Легко показать, что выполнение условий (15) приводит к следующим свойствам симметрии величин $B_\mathbf{n}$:

$$B_{\mathbf{n}_1} = -B_{\mathbf{n}_2} = B_{\mathbf{n}_3} = -B_{\mathbf{n}_4}, \quad B_{n_x 0 n_z} = 0, \tag{16б}$$

$$B_{\mathbf{n}_1} = B_{\mathbf{n}_2} = -B_{\mathbf{n}_3} = -B_{\mathbf{n}_4}, \quad B_{n_x n_y 0} = 0, \tag{16в}$$

$$B_{\mathbf{n}_1} = -B_{\mathbf{n}_2} = -B_{\mathbf{n}_3} = B_{\mathbf{n}_4}, \quad B_{n_x 0 n_z} = B_{n_x n_y 0} = 0. \tag{16г}$$

§ 2. Некоторые свойства четырех типов акустических волн

Свойства симметрии (16) позволяют определить некоторые характерные особенности уже описанных четырех возможных типов волн: нормировку, смещение, импульс и момент импульса ячеек кристалла.

1. Нормировка вероятности местоположения атомов в элементарной ячейке кристалла есть

$$\Delta N(t) = \int\limits_{(d_1 d_2 d_3)} d\mathbf{r} \int\limits_{(\infty)} \varphi(\mathbf{r},\ \mathbf{v},\ t)\, d\mathbf{v}.$$

Согласно формулам (4) и (6) имеем

$$\Delta N(t) = 2 d_1 d_2 d_3 \int e^{pt}\, dp \sum_{n_x} B_{n_x 00}(p)\, \frac{(-1)^{n_x+1}}{2\pi\, n_x - d_1 k} \sin(d_1 k/2).$$

Из (16) видим, что $\Delta N(t)$ отлично от нуля лишь для волны с симметрией (16а).

2. Смещение центра тяжести ячейки кристалла определяется в данной модели формулой (9) при $A=\mathbf{r}$. Согласно формулам (4), (6) имеем

$$\Delta X(t)=\int e^{pt}\,dp\sum_{n_x=-\infty}^{\infty}d_2d_3\int_{-d_{1/2}}^{d_{1/2}}x\exp\left\{i\left(\frac{2\pi}{d_1}n_x-k\right)x\right\}d_xB_{n_x00}(p), \tag{17а}$$

$$\Delta Y(t)=-\int e^{pt}\,dp\sum_{n_x=-\infty}^{\infty}(-1)^{n_x}\frac{2\sin(d_1k/2)}{2\pi n_x/d_1-k}\times$$

$$\times\sum_{n_y\neq 0}\left(\frac{-id_2^2d_3}{2\pi n_y}\right)B_{n_xn_y0}(p), \tag{17б}$$

$$\Delta Z(t)=-\int e^{pt}\,dp\sum_{n_x=-\infty}^{\infty}(-1)^{n_x}\frac{2\sin(d_1k/2)}{2\pi n_x/d_1-k}\times$$

$$\times\sum_{n_z\neq 0}\left(\frac{-id_3^2d_2}{2\pi n_z}\right)B_{n_x0n_z}(p). \tag{17в}$$

Сравнивая (17) с (16), видим, что для волн с симметрией (16а) смещение направлено вдоль волнового вектора, для (16, б, в) — перпендикулярно волновому вектору, для (16г) центр тяжести ячейки остается неподвижным.

3. На основе аналогичных соображений импульс ячейки кристалла

$$\mathbf{P}(t)=\int_{(d_1d_2d_3)}d\mathbf{r}\int_{(\infty)}m\mathbf{v}\,\varphi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\,d\mathbf{v}$$

направлен по волновому вектору в случае симметрии (16а), перпендикулярен ему в случае (16б, в) и равен нулю в случае (16г). Эти свойства, вместе с выводами п. 2, позволяют отождествить волны (16а) с продольными, а (16б, в) — с поперечными волнами в кристалле.

4. Момент импульса элементарной ячейки также может быть выражен через $B_{\mathbf{n}}$:

$$\mathbf{M}(t)=\int_{(d_1d_2d_3)}d\mathbf{r}\,[\mathbf{r}\mathbf{P}(\mathbf{r},t)],$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t)=m\int e^{pt}\,dp\,e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\sum_{\mathbf{n},\mathbf{l}}e^{i\mathbf{n}\mathbf{a}\mathbf{r}}\,\sigma(\mathbf{l}\mathbf{a}-\mathbf{k})\,a_{\mathbf{n}-\mathbf{l}}B_{\mathbf{l}}\int\frac{\mathbf{v}\left((\mathbf{l}\mathbf{a}-\mathbf{k})\dfrac{\partial f_M}{\partial\mathbf{v}}\right)}{p+i(\mathbf{n}\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{v}}\,d\mathbf{v}.$$

Используя свойства симметрии, можно показать, что в случае (16а) момент импульса ячейки равен нулю; в случаях (16б, в) он перпендикулярен волновому вектору и импульсу ячейки; в случае (16г) момент импульса параллелен волновому вектору. Заметим, что условия симметрии (11) имеют место и в классической модели кристалла, в которой, однако, отсутствует четвертый тип волн. Причина этого заключается в наличии локализации акустических смещений атомов в классической теории и, как следствие, иных свойств локальных функций распределения по сравнению с нелокальными (2), (4):

$$f_{кл}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{п} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{п}(t))\, \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{п}(t)),$$

что приводит к качественной разнице в поведении величин

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{(d_1 d_2 d_3)} d\mathbf{r} \int f_{кл}\, d\mathbf{v} \qquad \int\limits_{(d_1 d_2 d_3)} d\mathbf{r} \int [\mathbf{r}\, \mathbf{v}]\, f_{кл}\, d\mathbf{v};$$

с одной стороны, и

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{(d_1 d_2 d_3)} d\mathbf{r} \int (f_0 + \varphi)\, d\mathbf{v} \qquad \int\limits_{(d_1 d_2 d_3)} d\mathbf{r} \int [\mathbf{r}\, \mathbf{v}]\, (f_0 + \varphi)\, d\mathbf{v},$$

с другой.

§ 3. К определению экспериментальных возможностей наблюдения четвертого типа акустических волн

В эксперименте, описанном в [5], на один торец цилиндрического образца кварца (X-срез) была высажена алюминиевая пленка толщиной в 100 Å, которая нагревалась импульсом СВЧ (220 нс), создавая в кварце слабозатухающие тепловые фононы с $\lambda < 100$ Å (температура ванны, в которую помещен образец, 3,5К). Наблюдалось четыре моды тепловых фононов, распространяющихся вдоль кварцевого стержня с различными скоростями и интенсивностями. Первый и два последних фононных импульса, распределенные по величине скорости, авторы [5] (см. фиг. 7) связывают с продольной и двумя поперечными акустическими волнами; второй импульс — с четвертой новой модой. Наличие четвертой моды они объясняют специфической анизотропией кварца, которая приводит к возникновению угла между акустическим вектором Умова — Пойнтинга и волновым вектором. Этот угол непосредственно экспериментально не наблюдался, а определялся вычислением на ЭВМ решения дисперсионного уравнения для упругих волн в кварце. Все четыре моды фиксировались чувствительным сверхпроводящим балометром, помещенным у другого торца кварцевого стержня.

Нелокально-статистическая природа четвертой моды (см. § 1, 2) проявляется в [5] в следующих обстоятельствах.

1. Благодаря тепловому характеру источника волн с временем нагрева $2{,}2 \cdot 10^{-7}$с, которое значительно превышает время релаксации (10^{-14}—$2 \cdot 10^{-10}$с), связанной с передачей энергии степеням свободы системы, в источнике возбуждаются все внутренние степени свободы в существенной области генерации волн ($\simeq\lambda/2$, λ — длина волны каждой из четырех мод). В этих условиях естественно возникают и те движения, которые определяют четвертую моду:

$$\int d\mathbf{r} \int [\mathbf{r}\, \mathbf{v}]_x\, \varphi\, d\mathbf{v} \neq 0.$$

Нелокально-статистическая природа четвертой моды общая — она не требует специальной анизотропии, ведущей к возникновению угла между вектором Умова — Пойнтинга и волновым вектором. Это можно подвергнуть прямой экспериментальной проверке.

2. С точки зрения нашей модели становится ясным, почему обычные пьезоэлектрические способы возбуждения ультразвуковых волн не

возбуждают четвертую моду, — они характеризуются в основном первыми моментами от акустических функций распределения:

$$\int \mathbf{r}\, d\mathbf{r} \int \varphi\, d\mathbf{v} \neq 0; \quad \int d\mathbf{r} \int [\mathbf{r}\,\mathbf{v}]_x\, \varphi\, d\mathbf{v} = 0,$$

которые характерны только для классических первых трех мод (см. § 2).

3. Четвертая мода характеризуется двумя степенями свободы (движение точки по окружности), а каждая из классических мод — только одной (движение точки вдоль прямой), отсюда благодаря статистическому весу отношение интенсивностей четвертой и первой мод есть

$$\left.\frac{\max I^{(4)}}{\max I^{(1)}}\right|_{[\text{теор}]} = 2, \quad \left.\frac{\max I^{(4)}}{\max I^{(1)}}\right|_{[\text{эксп}]} \cong 2.$$

Экспериментальное значение мы получим, взяв отношение соответствующих величин из фиг. 7 в [5]. Концепция «наклонной моды» по [5] не приводит к сравнительным оценкам интенсивностей этих мод.

Рассмотрим влияние первой и четвертой моды на величину вероятности излучения γ-квантов атомных ядер в кристалле без отдачи (т. е. влияние на интенсивность эффекта Мёссбауэра). Эта вероятность определяется формулой [6]

$$f = \exp\left[-\frac{4\pi^2 \langle x^2\rangle}{\lambda_\gamma^2}\right],$$

где λ — длина волны γ-кванта, $\langle x^2\rangle$ — средний квадрат смещения атома в направлении излучения. Формула для этой величины в окрестности узла потенциальной ямы в нашей модели такова [3]:

$$\langle x^2\rangle = \frac{\theta}{\partial^2_{xx} K/\mathbf{r} = 0}\left[\int\limits_{(d_1 d_2 d_3)} \rho(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}\right]^{-1}.$$

Учитывая изменение нормировки вероятности местоположения атома в объеме элементарной ячейки кристалла для первой моды и сохранение ее для четвертой (см. § 2), имеем в области наличия мод:

$$\left.\begin{aligned}\rho &= \rho_0 - \overline{\delta\rho},\ \overline{\delta\rho} > 0\\ \theta &= \theta_0 + \overline{\delta\theta},\ \overline{\delta\theta} > 0\end{aligned}\right\}\ \text{для 1-й моды} \qquad \left.\begin{aligned}\overline{\delta\rho} &\equiv 0\\ \theta = \theta_0 + \overline{\delta\theta},&\ \overline{\delta\theta} > 0\end{aligned}\right\}\ \text{для 4-й моды}$$

$$f^{(1)}/f^{(4)} = \exp\left[-\frac{4\pi^2 \langle x_0^2\rangle\, \overline{\delta\rho}}{\lambda_\gamma^2 \rho_0}\right].$$

Эта формула указывает на различие влияния первой и четвертой мод на вероятность излучения γ-квантов без отдачи при условии, что можно экспериментально заметить отступление значения отношения $f^{(1)}/f^{(4)}$ от 1.

В последней формуле $\overline{\delta\rho}$ обозначает усредненное значение уменьшения вероятности местопребывания атомов кристалла в окрестности узлов, вызванное акустическим полем первой моды.

Для обоих указанных выше частот акустических колебаний, для ядер с атомным весом ~ 100, температурой Дебая кристаллов ~ 400 К, энергией γ-квантов ~ 150 кэВ [6] и для акустических смещений $\sim 3 \cdot 10^{-4}$ см при частотах $(150 \div 900) \cdot 10^3$ 1/с и скоростях звука $\sim 10^5$ см/с [7] получим

$$f^{(1)}/f^{(4)} \cong (0{,}985 \div 0{,}913),$$

что указывает на возможность экспериментального наблюдения отклонения этой величины от 1.

Таким образом, существуют реальные экспериментальные возможности проверки нелокально-статистической природы четвертого типа акустических волн в кристаллах.

Мы благодарны К. Н. Баранскому, обратившему наше внимание на экспериментальную работу И. Эндрюса и М. Страндберга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А. А. Теория многих частиц. М., 1950.
2. Власов А. А. Статистические функции распределения. М., 1966.
3. Власов А. А. «Теоретическая и математическая физика», 5, 388, 1970.
4. Власов А. А., Волянский К. И. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 14, № 3, 467, 1973.
5. Andrews J., Strandberg M. «Proc. of the IEEE», 54, 523, 1966.
6. Вертхайм Г. Эффект Мёссбауэра. М., 1966.
7. Карпушко Ф. П. «Приборы и техника эксперимента», № 3, 186, 1971.

Поступила в редакцию
13.1 1975 г.

Кафедра
теоретической физики.