Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1976

УДК 538.56.01

А. Н. ВАХРАМЕЕВ

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ПРИРОДА СУБГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Выясняется параметрический характер вложения энергии в субгармонические колебания и его особенности на примере возбуждения третьей субгармоники в нелинейном электрическом контуре.

В работах по исследованию субгармонических колебаний в нелинейных цепях [1—6] весьма мало уделяется внимания физической стороне происходящих процессов. Встречающиеся объяснения механизма возникновения субгармонических колебаний [2] нельзя считать исчерпывающими, поскольку энергетическая сторона в них не затрагивается.

Представление о характере энергетических процессов при субгармонических колебаниях можно получить из рассмотрения дифференциальных уравнений, описывающих их в электрическом контуре с нелинейной реактивностью. Уравнения первого приближения вполне удовлетворительно отражают все особенности субгармонических колебаний, наблюдаемых в системах, близких к консервативным, и с малой нелинейностью [7]. Рассмотрим колебательный контур с нелинейной емкостью (рис. 1). При аппроксимации вольткулоновой характеристики нелинейной емкости ограничимся полиномом третьей степени:

$$q(U) = c_0 U + \beta U^2 + \gamma U^3 = c_0\left(U + \frac{1}{c_0}\beta U^2 + \frac{1}{c_0}\gamma U^3\right).$$

Для емкости p—n-перехода полупроводникового диода: c_0 — статическая емкость,

$$\beta = \frac{c_0}{4U_0}, \quad \gamma = \frac{c_0}{8U_0^2}, \quad U_0 = U_к - U_с,$$

где $U_к$ — контактная разность потенциалов, $U_с$ — напряжение смещения на переходе. Уравнение Кирхгофа для контура имеет вид

$$L\frac{di}{dt} + Ri + U + Q = 0, \quad i = \frac{dq(U)}{dt},$$

$Q = Q_0 \sin 3\omega t$ — напряжение внешнего воздействия. Делая обычные предположения о малости величины затухания, коэффициентов при нелинейных членах, малости расстройки контура относительно одной трети частоты вынуждающей силы и пренебрегая членами второго порядка малости, уравнение контура для напряжения на емкости сможем записать

$$\ddot{U} + \delta\dot{U} + (1 + \xi)U + \frac{1}{c_0}\frac{d^2}{d\tau^2}[\beta U^2 + \gamma U^3] + Q_0 \sin 3\tau = 0.$$

Здесь

$$\delta = \frac{R}{\omega_0 L}, \quad \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1 + \xi, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{Lc_0}, \quad \tau = \omega t.$$

Решение этого уравнения можно представить в виде суммы вынужденных колебаний $\mathscr{P} = P \sin 3\tau$ с частотой 3τ и субгармонических колебаний $U = A\sin(\tau + \varphi)$ с частотой τ. Тогда в силу сделанных выше предположений о малости затухания и нелинейности напряжение вынужденных колебаний на емкости с достаточной точностью можно будет найти из уравнения

$$\ddot{\mathscr{P}} + \mathscr{P} = -Q_0 \sin 3\tau.$$

Откуда $P = -\frac{1}{8}Q_0$. Уравнение для субгармонических колебаний приобретает вид

$$\ddot{U} + U = -\xi U - \delta\dot{U} - \frac{1}{c_0}\frac{d^2}{d\tau^2}[\beta(U + \mathscr{P})^2 + \gamma(U + \mathscr{P})^3]. \tag{1}$$

Полагая $\mathscr{P} = P\sin 3\tau$ и $U = A\sin(\tau + \varphi)$, можно установить, что поступление энергии в субгармонические колебания в этом уравнении определяется нелинейным членом $[3\gamma U^2 \mathscr{P}]$. Отбрасывая содержащиеся в нем гармонические составляющие с частотами 3τ, 5τ, не учитываемые методами первого приближения, его можно (опуская численный коэффициент) записать в виде

$$\frac{1}{2}\frac{1}{c_0}\gamma AP\cos(2\tau - \varphi)U.$$

Таким образом, внешняя вынуждающая сила, кроме обычного силового воздействия на колебательный контур, оказывает еще энергетическое воздействие, описываемое в первом приближении членом с периодически изменяющимся коэффициентом. Величина $\frac{1}{c_0}\gamma AP = \frac{\Delta c}{c_0}$ представляет собой зависящий от амплитуды колебаний в контуре коэффициент глубины модуляции реактивного параметра системы. Очевидно, вложение энергии в колебания осуществляется благодаря периодическому изменению реактивного параметра контура с частотой в два раза выше частоты существующих в нем колебаний. Эта модуляция энергоемкого параметра системы вызывается присутствием в спектре закона изменения нелинейной реактивности соответствующего компонента. Своим появлением она обязана комбинационному взаимодействию вынуждающих колебаний с существующими колебаниями в контуре. При благоприятной фазе вынуждающих колебаний и при надлежащей амплитуде колебаний в контуре фаза изменения реактивного параметра и глубина его модуляции обеспечивают поступление энергии, достаточное для компенсации диссипативных потерь и, следовательно, для поддержания в нем колебаний.

Субгармоническим колебаниям свойственна характерная особенность параметрического процесса поступления энергии в колебательную систему. Отыскивая решение (1) в виде $U=A\sin(\tau+\varphi)$, укороченные уравнения можно записать

$$\dot{A}=-\frac{\delta}{2}A+\frac{1}{2}\frac{1}{c_0}\gamma A^2P\sin 3\varphi,$$
$$\dot{\varphi}=\frac{\xi}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{c_0}\gamma A^2-\frac{1}{c_0}\gamma P^2+\frac{1}{2}\frac{1}{c_0}\gamma AP\cos^3\varphi. \qquad (2)$$

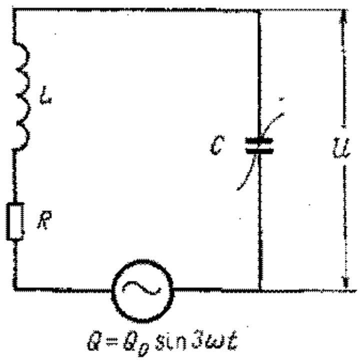

Рис. 1. Колебательный контур с нелинейной емкостью

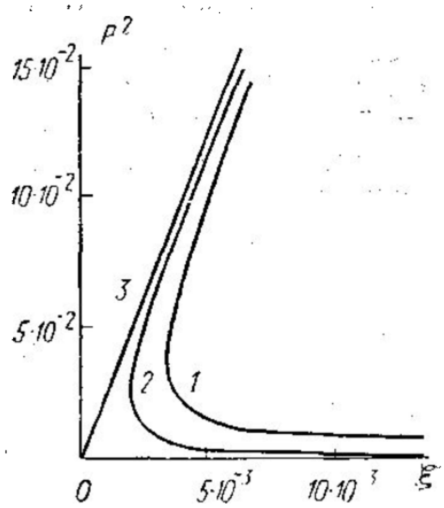

Рис. 2. Области существования субгармонических колебаний в зависимости от расстройки и амплитуды вынуждающих колебаний для $\delta=24\cdot10^{-4}$; *1* — $\delta=12\cdot10^{-4}$, *2* — $\delta=6\cdot10^{-4}$, *3* — $\delta=0$

Для стационарных колебаний $\dot{A}=0$, $\dot{\varphi}=0$ из первого уравнения следует

$$\frac{1}{c_0}\gamma A_0P\sin 3\varphi_0=\delta. \qquad (3)$$

Заметив, что добротность колебательной системы

$$Q=\frac{1}{\delta}=2\pi\frac{W_{\text{н}}}{W_{\text{п}}T},$$

где $W_{\text{н}}$ — полный запас энергии в колебательном контуре, $W_{\text{п}}$ — мощность потерь энергии в системе, уравнение (3) запишется

$$\omega_0 W_{\text{н}}\frac{1}{c_0}\gamma A_0P\sin 3\varphi_0=W_{\text{п}}.$$

Левая часть этого равенства представляет собой мощность, поступающую в колебательный контур за счет периодического изменения его емкости с коэффициентом глубины модуляции $m=\frac{1}{c_0}\gamma A_0P$.

Возникающие в системе фазовые соотношения между изменением энергоемкой составляющей реактивного элемента и возбужденными колебаниями учитываются множителем $\sin 3\varphi_0$. Действительно, пусть полный запас энергии в колебательном контуре $W_{\text{н}}=\frac{q^2}{2c}$, где q — заряд.

емкости в момент ее изменения. Приращение энергии за счет изменения емкости на Δc будет

$$\Delta W_{\text{н}} = \frac{q^2}{2(c-\Delta c)} - \frac{q^2}{2c}, \quad \text{при } \frac{\Delta c}{c} \ll 1,$$

$$\Delta W_{\text{н}} = \frac{q^2}{2c^2}\Delta c.$$

Приращение мощности можно записать

$$\frac{dW_{\text{н}}}{dt} = \frac{q^2}{2c^2}\frac{dc}{dt}.$$

Принимая во внимание, что $q = Uc$, а изменение интересующей нас составляющей общего изменения емкости

$$c(t) = c_0\left[1 + \frac{1}{c_0^2}\gamma A_0 P\cos(2\tau - \varphi_0)\right] \text{ и } U = A_0\sin(\tau + \varphi_0),$$

мощность, поступающая в колебательную систему, выразится как

$$\frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{dW_{\text{н}}}{dt}\right)dt = \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{q^2}{2c_0}\frac{dc}{dt}\right)dt = \frac{1}{4}c_0A_0^2\omega_0\frac{1}{c_0}\gamma A_0P\sin 3\varphi_0 =$$

$$= \frac{1}{2}W_{\text{н}}\omega_0\frac{1}{c_0}\gamma A_0 P\sin 3\varphi_0.$$

Таким образом, вложение энергии от внешнего источника в субгармонические колебания происходит пропорционально полному запасу энергии в колебательном контуре и коэффициенту глубины модуляции реактивного параметра. Параметрическое вложение энергии в субгармонические колебания не вызывает неограниченного нарастания их амплитуды из-за непременного сопутствия им процесса ограничения за счет нелинейной реактивности колебательного контура. Параметрический процесс вложения энергии в субгармонические колебания в силу комбинационного происхождения изменения реактивного параметра системы несколько отличается от процессов, свойственных обычному параметрическому возбуждению колебаний при непосредственном воздействии внешней силы на нелинейный элемент контура. Одной из отличительных особенностей субгармонических колебаний является отсутствие у них самовозбуждения. Поэтому в дальнейшем более уместно говорить об условиях их существования в колебательной системе, чем об условиях их возбуждения, включающих в себя и начальные условия нестационарных процессов, здесь не рассматриваемых.

Совокупность всех значений параметров колебательной системы и величины вынуждающей силы, при которых в ней имеют место субгармонические колебания, можно определить из условий существования стационарных решений укороченных уравнений (2). Полагая $\dot{A}=0$, $\dot{\varphi}=0$ и исключив из уравнений фазу, получим выражение для стационарной амплитуды субгармонических колебаний:

$$\gamma A^2 = \xi - \frac{3}{2}\gamma P^2 \pm \sqrt{-\frac{7}{4}\gamma^2P^4 + \xi\gamma P^2 - \delta^2}, \tag{4}$$

здесь $\frac{3}{4}\frac{1}{c_0}\gamma$ обозначено через γ. Исследование известными методами устойчивости стационарных состояний дает значение устойчивой амплитуды, если в ее выражении (4) перед квадратным корнем будет знак плюс, а подкоренное выражение

$$-\frac{7}{4}\gamma^2 P^4 + \xi\gamma P^2 - \delta^2 \geqslant 0. \qquad (5)$$

При выполнении этих условий стационарная амплитуда субгармонических колебаний (4) будет всегда действительной величиной и, следовательно, существование стационарных колебаний в системе вполне определяется условием их устойчивости.

На рис. 2 показана граница области значений расстройки и амплитуд вынуждающей силы, для которых при заданном затухании колебательного контура возможны субгармонические колебания. Нетрудно заметить, что, хотя коэффициент глубины модуляции реактивного параметра на этой границе не остается постоянным

$$m = \frac{1}{c_0}\gamma A_0 P = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c_0}\right)^2 \gamma^2 P^4 + \delta^2},$$

его энергетическое воздействие не изменяется (как это следует из уравнения (3)) за счет возникающих фазовых соотношений между модуляцией параметра и возбуждаемыми колебаниями. Таким образом, субгармоническим колебаниям свойственна особенность параметрического способа возбуждения колебаний—наличие критического значения величины, характеризующей вложение энергии в систему и представляющей собой не что иное, как эффективный коэффициент модуляции реактивного параметра

$$m_{\text{эф}} = \frac{1}{c_0}\gamma A_0 P \sin 3\varphi_0. \qquad (6)$$

Если эффективный коэффициент глубины модуляции не достигает критического значения, стационарные колебания в системе не могут существовать. Параметрический характер субгармонических колебаний наилучшим образом подтверждает постоянство величины критического эффективного коэффициента глубины модуляции при изменении вынуждающей силы. На рис. 3 представлены значения этого коэффициента по данным экспериментальных измерений амплитуды и фазы субгармонических колебаний при различных затуханиях контура.

Условие существования (5) стационарных решений укороченных уравнений, как видно, выполняется при сколь угодно малой амплитуде вынуждающей силы. Величина линейной расстройки колебательного контура при этом значительно возрастает и перестает удовлетворять первоначальному предположению о ее малости, выдвинутому при написании укороченных уравнений. Полагая в соответствии с методом медленно меняющихся амплитуд расстройку колебательного контура относительно частоты существующих в нем колебаний малой величиной, следует считать малой величиной также и его эффективную расстройку, представляющую собой сумму линейной и нелинейной расстройки[1].

Из укороченных уравнений для субгармонических колебаний (2) видно, что при выполнении условия их существования (5) знаки линейной и нелинейной расстройки противоположны друг другу. Поэтому, если при составлении укороченных уравнений ввести эффективную расстройку и считать ее величину удовлетворяющей применимости метода медленно меняющихся амплитуд, то, очевидно, тем самым снимаются

[1] Нелинейная расстройка — это расстройка, вызываемая существующими в контуре колебаниями и воздействием вынуждающей силы.

ограничения с величины линейной расстройки и с членов уравнения, описывающих нелинейную расстройку. Эффективная расстройка на границе области существования будет

$$\xi_{эф} = \xi_л + \xi_н = -\frac{1}{2}\gamma P^2.$$

При $P \to 0\ \xi_{эф} \to 0$, в то время как

$$\xi_л = \frac{7}{4}\gamma P^2 + \frac{\delta^2}{\gamma P^2} \to \infty.$$

Таким образом, из условия существования стационарных решений следует, что субгармонические колебания могут существовать в колеба-

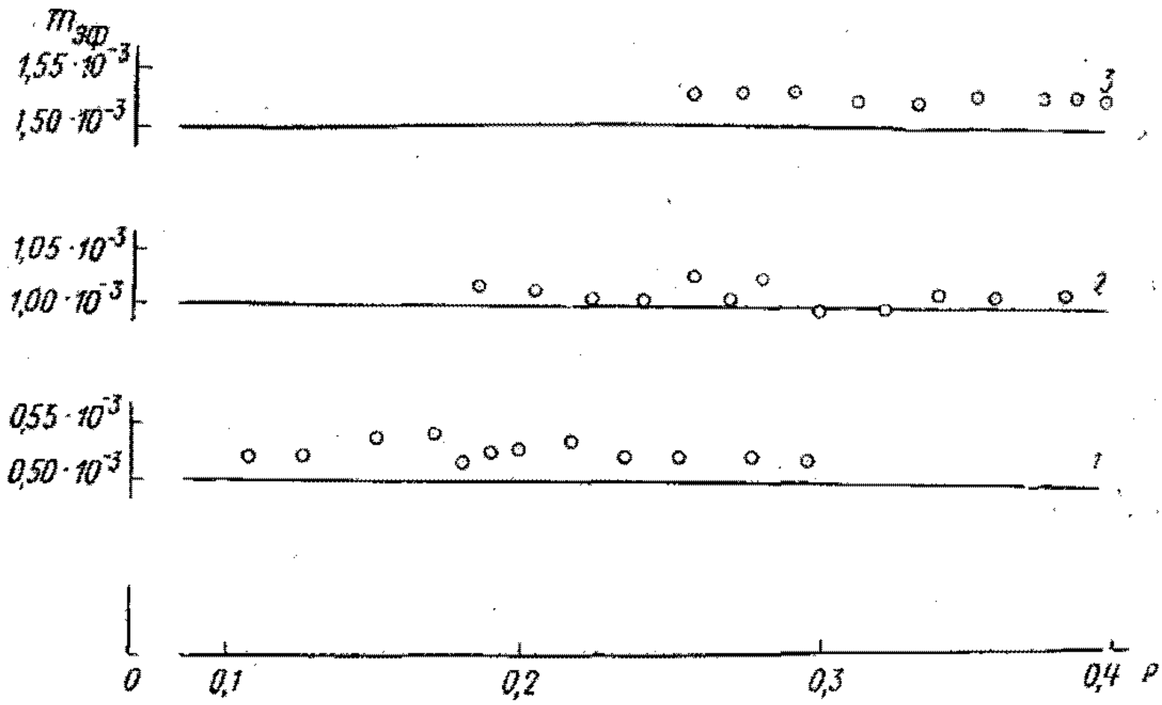

Рис. 3. Экспериментально наблюдаемые критические значения эффективного коэффициента глубины модуляции реактивного параметра при различных амплитудах вынуждающей силы: $1-\delta=0{,}5\cdot10^{-3}$, $2-\delta=1{,}0\cdot10^{-3}$, $3-\delta=1{,}5\cdot10^{-3}$

тельной системе с постоянным затуханием при сколь угодно малой вынуждающей силе. Этот несколько необычный вывод также подчеркивает их параметрическую природу. Действительно, с уменьшением вынуждающей силы растет величина минимальной амплитуды субгармонических колебаний, с которой они могут существовать в колебательной системе $A_0^2 = \frac{1}{4}\gamma P^2 + \frac{\delta^2}{\gamma P^2}$. При этом вызываемая ею нелинейная расстройка должна быть скомпенсирована линейной расстройкой колебательного контура $\xi_л \geqslant \frac{7}{4}\gamma P^2 + \frac{\delta^2}{\gamma P^2}$. Эффективная расстройка контура уменьшается и это приводит к более благоприятным фазовым соотношениям между изменением реактивного параметра и возбуждаемыми колебаниями

$$\cos 3\varphi = \frac{P}{2A_0} \quad \text{при } P \to 0\ 3\varphi \to \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, увеличивая амплитуду начальных колебаний в контуре и его линейную расстройку, можно в принципе получить критическое значение коэффициента модуляции реактивного параметра при сколь угодно малой величине вынуждающей силы.

В [7] отмечается хорошее совпадение экспериментальных зависимостей, соответствующих границам области существования субгармонических колебаний, с вычисленными при параметрах системы и напряжениях на нелинейном элементе ограниченных в своих изменениях рамками метода медленно меняющихся амплитуд. Это также подтверждает параметрическую природу субгармонических колебаний, описываемую уравнениями первого приближения.

Субгармоническим колебаниям свойствен расстроечный механизм ограничения амплитуды колебаний из-за неприменного участия в энергетических процессах нелинейной реактивности колебательного контура. В силу комбинационного происхождения коэффициента глубины модуляции реактивного параметра процесс ограничения субгармонических колебаний проявляется несколько иначе, чем при параметрических колебаниях. В отличие от них увеличение поступления энергии в систему с ростом амплитуды происходит более энергично — пропорционально кубу амплитуды возбуждаемых колебаний. Поэтому расстроечный процесс ограничения колебаний в общем, одинаковый как для субгармонических, так и для параметрических колебаний, «устанавливает» стационарную амплитуду субгармонических колебаний при более высоких значениях нелинейной расстройки, чем для параметрических. Как известно, для параметрических колебаний при кубической характеристике нелинейности изменение линейной расстройки колебательного контура полностью компенсируется соответствующим изменением нелинейной расстройки. Отсутствие такой компенсации у субгармонических колебаний приводит к зависимости фазы колебаний от расстройки колебательного контура, не наблюдаемой в соответствующих параметрических системах.

Рассмотренный комбинационный механизм параметрического вложения энергии для третьей субгармоники имеет место и при субгармонических колебаниях более высокого порядка. Очевидно, при их описании необходимо учитывать в характеристике нелинейного элемента колебательной системы члены порядка исследуемой субгармоники.

Таким образом своеобразие параметрического механизма вложения энергии в субгармонические колебания состоит в осуществлении этого процесса компонентом из спектра изменения нелинейной реактивности, возникающим в результате комбинационного взаимодействия вынуждающих колебаний с возбуждаемой субгармоникой. Энергетическое воздействие этого компонента характеризуется эффективным коэффициентом глубины модуляции реактивного параметра системы. При критическом значении эффективного коэффициента модуляции, равного затуханию колебательного контура, в контуре осуществляются стационарные субгармонические колебания. Комбинационная природа эффективного коэффициента модуляции реактивного параметра позволяет сохранить его величину равной критической при неограниченно малом значении вынуждающей силы, путем задания начальных колебаний с соответственно увеличенной амплитудой и компенсацией вызываемой ею расстройки колебательного контура — линейной расстройкой. На границе области существования субгармонических колебаний каждому значению амплитуды вынуждающей силы свойственна своя максимальная величина эффективной расстройки колебательного контура, при которой фазовые соотношения обеспечивают критическое значение эффективного коэффициента модуляции реактивного параметра системы.

Автор искренне благодарен В. В. Мигулину за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М., 1968.
2. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М., 1952.
3. Ивашев В. И., Парилис И. И. Колебания в нелинейных электрических системах. Ташкент, 1967.
4. Либкинд М. С. «Изв. АН СССР», сер. физич., № 9, 1953.
5. Hayashi C. «J. Appl. Phys.», 24, 1953.
6. Ивашев В. И. «Изв. АН УзбССР», сер. техн., № 4 и 5, 1962.
7. Вахрамеев А. Н. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 2, 1970.

Поступила в редакцию
31.1 1975 г.

Кафедра
физики колебаний