ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 2 — 1976

УДК 512.831+621.372.061

В. И. ШЕСТАКОВ

О МАТРИЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ КАСКАДНЫХ СОЕДИНЕНИЙ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Матричные представления каскадных соединений четырехполюсников, некоторые из ветвей которых разомкнуты, оказываются невозможными, поскольку операция умножения матриц с элементами, равными ∞, не определена. В статье излагается метод алгебраического описания каскадных соединений четырехполюсников, сводящихся к парам двухполюсников, импедансы которых могут иметь любые значения и, в частности, бесконечно большие.

Следуя тенденции, наметившейся в современной теории цепей [1], мы будем вместо традиционных терминов двухполюсник, четырехполюсник и многополюсник применять термины 1—*P*-цепь, 2—*P*-цепь и *n*—*P*-цепь.

Основной матрицей 2—*P*-цепи (рис. 1) назовем матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1}$$

системы уравнений

$$\begin{aligned} U_1 &= a_{11}U_2 + a_{12}I_2, \\ I_1 &= a_{21}U_2 + a_{22}I_2, \end{aligned} \tag{2}$$

где U_1 и I_1 (U_2 и I_2) — напряжение и сила тока на входе (выходе) этой цепи. Основные матрицы 2—*P*-цепей будем обозначать жирными заглавными буквами, а соответствующие им 2—*P*-цепи — теми же, но не жирными буквами. Согласно этому условию 2—*P*-цепь на рис. 1 помечена буквой A, а жирной буквой $\mathbf{A}$ обозначена ее основная матрица.

Каскадным соединением 2—*P*-цепей A_1 и A_2 называют такое их соединение, при котором выходные полюсы $1'$ и $0'$ одной из них соединены (находятся в электрическом контакте) с входными полюсами 1 и 0 другой. Та из 2—*P*-цепей A_1 и A_2, входные полюсы которой оказываются при этом также и входными полюсами их каскадного соединения, называются *первым*, а другая — *вторым каскадом* этого соединения. Каскадное соединение 2—*P*-цепей A_1 и A_2, в котором A_1 и A_2 являются первым и вторым каскадами (рис. 2), обозначим $A_1 \cdot A_2$. Точка в этом символе служит знаком каскадного соединения, т. е. соответствует узлам $1'$—1 и $0'$—0, в которых каскадно соединены 2—*P*-цепи A_1 и A_2.

На рис. 2 узлы $1'-1$ и $0'-0$ обозначены *сплошными кружочками*, в отличие от полюсов, изображаемых маленькими *окружностями*.

Символ $A_2 \cdot A_1$ означает каскадное соединение $2-P$-цепей A_2 и A_1, в котором A_2 является *первым*, а A_1 — *вторым каскадом*. Для обозначения каскадного соединения $2-P$-цепей $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в указанном порядке будем применять символ $\prod_{k=1}^{n} A_k$ и символ $\prod_{k=1}^{\infty} A_k$ при $n \to \infty$.

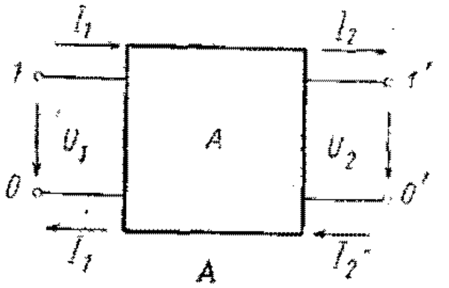

Рис. 1

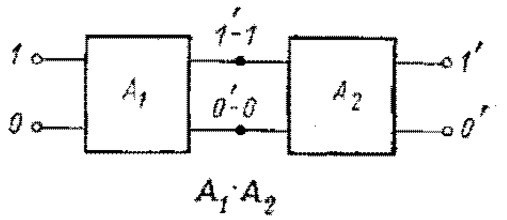

Рис. 2

Матрицы $\mathbf{A}_k$, $\prod_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k$ и $\prod_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k$ условимся называть *матричными представлениями* соответствующих им $2-P$-цепей A_k, $\prod_{k=1}^{n} A_k$ и $\prod_{k=1}^{\infty} A_k$. Знакам каскадных соединений $2-P$-цепей соответствуют знаки умножения в матричных представлениях этих соединений.

Определение 1. $2-P$-цепи A_1 и A_2 называются *равными*, если и только если равны их основные матрицы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$.

Матрица $\mathbf{A}$ $2-P$-цепи A, построенной посредством каскадного соединения $\prod_{k=1}^{n} A_k$ $2-P$-цепей $A_1, A_2, \ldots, A_n$, равна, как известно, произведению $\prod_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k$ их основных матриц $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, т. е.

$$\mathbf{A} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k. \qquad (3)$$

В силу определения 1 это равенство равносильно равенству

$$A = \prod_{k=1}^{n} A_k \qquad (4)$$

и может поэтому считаться его матричным представлением.

Если обозначения $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}_k$ основных матриц условимся считать одновременно и символами соответствующих им $2-P$-цепей A и A_k, а знаки умножения основных матриц — знаками каскадных соединений $2-P$-цепей, соответствующих этим матрицам, то равенство (4) окажется излишним дубликатом равенства (3). Но зато равенство (3) мы должны будем интерпретировать двояко — как равенство между матрицами и одновременно как равенство между $2-P$-цепями, для которых эти матрицы являются основными. Соответственно и каждый из символов $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_k$ и $\prod_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k$ мы должны читать двояко в зависимости от той роли, которую эти символы играют в данном контексте. Когда они служат лишь обозначениями соответствующих им 2—P-цепей, мы будем называть эти символы *2—P-цепями* $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_k$ и $\prod_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k$, а выражения «2—$P$-цепь $\mathbf{A}$» и «каскадное соединение $\prod_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k$» будем считать сокращениями выражений «2—P-цепь A, основной матрицей которой является матрица $\mathbf{A}$», и соответственно «каскадное соединение $\prod_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k$ 2—P-цепей $A_1, A_2, ..., A_n$ с основными *матрицами* $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_n$». Эти же символы мы будем называть матрицами $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_k$ и $\prod_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k$ в том случае, когда по смыслу они обозначают матрицы. В случае же, когда оказывается необходимым говорить одновременно и о 2—P-цепях и об их основных матрицах, мы, естественно, должны отказаться от использования матричных символов для обозначения 2—P-цепей и их каскадных соединений. В этом случае будем применять символы матриц *не взамен*, а *наряду* с буквенными обозначениями самих 2—P-цепей и их каскадных соединений.

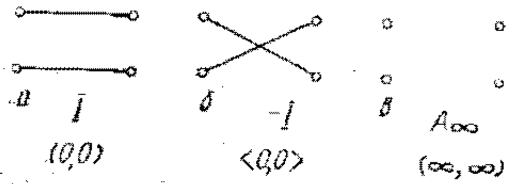

Рис. 3

Простейшими из схем 2—P-цепей, представимых основными матрицами

$$\mathbf{I}_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_A, \quad -\mathbf{I}_A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_A, \tag{5}$$

являются схемы, изображенные на рис. 3, *а*, *б*. Эти схемы назовем *прямым соединителем* и соответственно *скрещенным соединителем* или просто *скрещением* проводов, а матрицы $\mathbf{I}_A$ и $-\mathbf{I}_A$ — *единичной основной* и соответственно *негативно-единичной основной* матрицей. Нижний индекс A в обозначениях матриц (5) предназначен для того, чтобы не смешивать их с матрицами $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, все элементы которых являются числами. В отличие от этих числовых матриц в матрицах (5) лишь диагональные элементы являются числами. Недиагональные же элементы в матрицах (5) суть не числа, а, как видно из (1) и (2), величины, имеющие размерность сопротивления и проводимости, т. е. $a_{12}=0$ и $a_{21}=0$ Ом$^{-1}$. В дальнейшем будем отбрасывать индексы A в обозначениях матриц (5).

Равенства

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}, \tag{6}$$

$$-\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot (-\mathbf{I}) = -\mathbf{A} \tag{7}$$

содержат матричные представления соответствующих каскадных соединений 2—P-цепей $\mathbf{I}$, $-\mathbf{I}$ и $\mathbf{A}$. Как видно из равенств (6), 2—P-цепь $\mathbf{I}$, т. е. прямой соединитель (рис. 3, *а*), играет роль *нейтрального элемента каскадного соединения*. Он является частным случаем 2—P-цепи

$$\mathbf{A}^+ = \begin{pmatrix} 1 & z_{11'} + z_{00'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $z_{11'}$ и $z_{00'}$ — импедансы прямых ветвей, соединяющих полюсы 1 и 1′ и соответственно — полюсы 0 и 0′ 2—P-цепи $\mathbf{A}^+$. При $z_{11'} = z_{00'} = 0$ Ом получаем равенство $\mathbf{A}^+ = \mathbf{I}$, а схемы, изображенные на рис. 4, вырождаются в схему, изображенную на рис. 3, *а*.

Точно так же цепь $-\mathbf{I}$ является частным случаем 2—P-цепи

$$\mathbf{A}^- = \begin{pmatrix} -1 & -(z_{10'} + z_{01'}) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $z_{10'}$ и $z_{01'}$ — импедансы диагональных ветвей этой цепи, т. е. ветвей, соединяющих полюсы 1 и 0 соответственно с полюсами 0′ и 1′. При $z_{10'} = z_{01'} = 0$ Ом получаем равенство $\mathbf{A}^- = -\mathbf{I}$, а схемы 2—$P$-цепи $\mathbf{A}^-$, изображенные на рис. 5, вырождаются в схему, изображенную на рис. 3, *б*. При $z_{11'} = z_{00'} \to \infty$ Ом и $z_{10'} = z_{01'} \to \infty$ Ом матрицы $\mathbf{A}^+$ и $\mathbf{A}^-$ принимают соответственно следующие предельные значения:

$$\mathbf{A}^+_\infty = \begin{pmatrix} 1 & \infty \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^-_\infty = \begin{pmatrix} -1 & \infty \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

ибо, как известно [2],

$$\infty + \infty = \infty. \tag{11}$$

2—P-цепи, соответствующие основным матрицам $\mathbf{A}^+$ и $\mathbf{A}^-$, вырождаются при этом в 2—P-цепь, изображенную на рис. 3, *в*. Эту вырожденную 2—P-цепь назовем *пустой 2—Р-цепью* или *пустым четырехполюсником*. Пустая 2—P-цепь является, очевидно, вырожденным частным случаем *любой* 2—P-цепи. Действительно, полагая проводимости всех ветвей в любой 2—P-цепи равными нулю, мы получим пустую 2—P-цепь. Пустую 2—P-цепь условимся обозначать символом A_∞. Этой цепи соответствует не одна, а по крайней мере две различные матрицы $\mathbf{A}^+_\infty$ и $\mathbf{A}^-_\infty$, причем каждая из них не является вполне определенной матрицей, ибо среди элементов этих матриц содержится несобственное число ∞ множества комплексных чисел.

Операция умножения такого рода матриц друг на друга и на вполне определенные матрицы, как известно, не определена. Матричные представления каскадных соединений 2—P-цепей, среди каскадов которых встречается цепь A_∞, оказываются вследствие этого неопределенными.

Легко видеть, что те же матрицы (10) мы получим и в случае, когда в схемах, изображенных на рис. 4 и 5, разорвем не обе ветви z_1 и z_2, а лишь одну из них, ибо по определению [2]

$$z + \infty = \infty = \infty + z \tag{12}$$

при любом значении комплексного переменного z.

Матричные представления каскадных соединений 2—P-цепей, некоторые из каскадов которых являются 2—P-цепями $\mathbf{A}^+$ или $\mathbf{A}^-$, оказываются, как видим, неопределенными в предельном случае, когда $z_1 \to \infty$ или $z_2 \to \infty$. В результате этого оказывается невозможным использование матричных методов для описания каскадных соединений обычных линейных 2—P-цепей с 2—P-цепями, содержащими контакты каких-либо реле, выключателей или рубильники (тумблеры), трехпозиционные коммутаторы и вообще любые переключательные схемы.

Для описания разного рода переключательных схем в настоящее время широко используется булева алгебра, а для описания каскадных соединений 2—*P*-цепей, не содержащих переключательных схем, используются методы матричной алгебры. Для описания же каскадных соединений, в которых содержатся, как обычные линейные 2—*P*-цепи

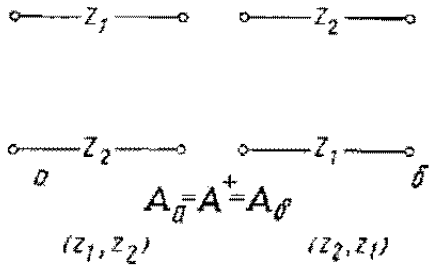

Рис. 4

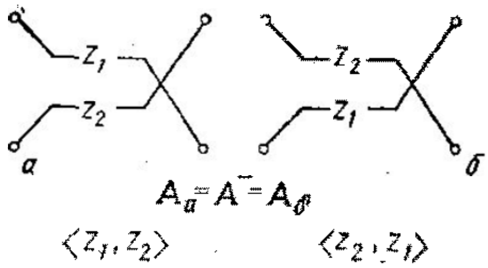

Рис. 5

с постоянными параметрами, так и переключательные 2—*P*-цепи, в которых параметры принимают значения 0 и ∞, адекватного алгебраического аппарата еще нет. Естественно попытаться начать создание такого аппарата со случая, когда соединяемые каскадно 2—*P*-цепи сводятся к паре двухполюсников (1—*P*-цепей).

В тех случаях, когда нас интересует некоторая 2—*P*-цепь не как целое, т. е. не как некоторый «закрытый ящик», а то, как эта цепь построена из каких-либо 1—*P*-цепей, мы будем рассматривать схему соединений 1—*P*-цепей, образующих данную 2—*P*-цепь. Эту схему мы будем называть *схемой* данной *2—P-цепи* или, короче, *2—P-схемой*. Эти термины эквивалентны традиционным терминам *четырехполюсная схема данного четырехполюсника* и *четырехполюсная схема*.

Так же, как в качестве символов 2—*P*-цепей мы условились применять жирные буквы, обозначающие их основные матрицы, условимся в качестве символов 1—*P*-цепей применять буквы, обозначающие импедансы этих цепей. Так, 1—*P*-цепь, импеданс которой есть z_k ($k=1, 2, \ldots$), будем называть z_k-*цепью*.

Вырожденными 1—*P*-цепями (двухполюсниками) назовем такие 1—*P*-цепи (двухполюсники), импедансы которых равны 0 Ом или ∞ Ом. Вырожденной 2—*P*-схемой назовем такую 2—*P*-схему, все 1—*P*-цепи которой являются вырожденными. Все схемы, изображенные на рис. 3, являются вырожденными. 1—*P*-цепи с импедансом 0 Ом будем называть *идеальными проводниками*, а графически изображать их как обычно, т. е. сплошными линиями, соединяющими полюсы этих цепей накоротко. 1—*P*-цепь с импедансом ∞ Ом будем называть разрывом цепи и обозначать ее графически соответственно этому наименованию. Если, например, в схемах, изображенных на рис. 4, $z_1=\infty$ Ом, то вместо z_1 на чертежах этих схем мы оставим ничем не заполненные пробелы.

2—*P*-схему, изображенную на рис. 4, *а*, обозначим символом упорядоченной пары (z_1, z_2), первым и вторым членами которой являются импедансы z_1 и z_2 верхней и нижней ветви этой схемы. При перестановке членов z_1 и z_2 пары (z_1, z_2) получим пару (z_2, z_1), являющуюся символом 2—*P*-схемы, изображенной на рис. 4, *б*.

Схему, описываемую парой вида (z_1, z_2), условимся называть *прямо-проводящей*, а саму пару (z_1, z_2) — *импедансным символом* этой схемы.

Равенство прямо-проводящих 2—P-схем определим посредством равенства их *импедансных* символов.

Определение 2. Равенство

$$(z_1, z_2) = (z_3, z_4) \qquad (13)$$

считается равносильным совокупности следующих равенств:

$$z_1 = z_3, \quad z_2 = z_4. \qquad (14)$$

Сложение пар определяется посредством формулы

$$(z_1, z_2) + (z_3, z_4) \underset{D}{=} (z_1 + z_3, \ z_2 + z_4), \qquad (15)$$

где знак $\underset{D}{=}$ равенства по определению.

Если мы будем пары (z_1, z_2) и (z_3, z_4) считать символами 2—P-схем вида, изображенного на рис. 4, то пара (z_1+z_3, z_2+z_4) будет служить импедансным символом схемы этого же вида, причем импедансы верхней и нижней ее ветвей равны z_1+z_3 и z_2+z_4. Выражение $(z_1, z_2)+(z_3, z_4)$ мы можем интерпретировать как *символ каскадного соединения* схем (z_1, z_2) и (z_3, z_4), первым каскадом в котором является первая из них. Знак плюс в этом выражении служит знаком каскадного соединения тех 2—P-схем, между символами которых он находится, подобно тому, как знак плюс в выражении z_i+z_k $(i, k=1, 2, ...)$ служит знаком последовательного соединения 1—P-схем, между символами z_i и z_k которых он находится.

Из ассоциативности и коммутативности последовательного соединения 1—P-схем следует, очевидно, ассоциативность и коммутативность каскадного соединения прямо-проводящих 2—P-схем.

В силу определений 2 и из равенств (11), (12) и (14) следуют аналогичные равенства

$$(\infty, \infty) = (\infty, \infty) = (\infty, \infty)$$

$$(z_1, z_2) + (\infty, \infty) = (\infty, \infty) = (\infty, \infty) + (z_1, z_2) \qquad (16)$$

для пустой 2—P-схемы (∞, ∞) и *любой* прямо-проводящей схемы (z_1, z_2). Таким образом, пустая 2—P-схема (∞, ∞) является *универсально-поглощающим элементом каскадного соединения* прямо-проводящих схем, подобно тому, как разрыв цепи ∞ Ом является *универсально-поглощающим элементом последовательного соединения* 1—P-схем.

Нейтральным элементом (нулем) каскадного соединения прямо-проводящих 2—P-схем является схема $(0, 0)$, изображенная на рис. 3, *а*, так как равенство

$$(0, 0) + (z_1, z_2) = (z_1, z_2) = (z_1, z_2) + (0, 0) \qquad (17)$$

справедливо, очевидно, при любых комплексных значениях z_1 и z_2. Равенство (17) является частным случаем более общего утверждения, выражаемого аналогичным матричным равенством (6).

Для равенств же (16) мы не имеем матричного аналога, ибо, как уже отмечалось, основная матрица для пустой 2—P-цепи не является вполне определенной матрицей и операция умножения ее на какие-либо матрицы не определена. Точно так же не определена основная матрица и для 2—P-схем вида (z, ∞) и (∞, z) при любом комплексном значении z, и единственным методом символического выражения каскадных соединений 2—P-цепей, содержащих такого рода схемы, остается лишь описанный метод импедансных символов.

Схему, изображенную на рис. 5, *а*, условимся обозначать парой вида $<z_1, z_2>$ и назовем ее *накрест-проводящей схемой*. Само же обозначение $<z_1, z_2>$ будем называть *импедансным символом накрест-проводящей схемы*. При $z_1=0$ и $z_2=0$ мы получим из $<z_1, z_2>$ схему скрещенного соединителя $<0, 0>$, изображенную на рис. 3, *б*.

Определение равенства пар $<z_1, z_2>$ и $<z_3, z_4>$ получается из определения 2 при замене в нем пар вида (z_i, z_k) парами вида $<z_i, z_k>$.

Сложение пар этого вида определим посредством формулы

$$\langle z_1, z_2\rangle + \langle z_3, z_4\rangle \underset{D}{=} (z_1 + z_4, z_2 + z_3). \tag{18}$$

Из этой формулы следует, что

$$\langle z_3, z_4\rangle + \langle z_1, z_2\rangle = (z_3 + z_2, z_4 + z_1),$$

т. е. перестановка пар $<z_1, z_2>$ и $<z_3, z_4>$ приводит (сравним (18) с только что полученным равенством) к перестановке членов пары, являющейся суммой пар $<z_1, z_2>$ и $<z_3, z_4>$.

Сложение разнородных пар определим посредством формул

$$\langle z_1, z_2\rangle + (z_3, z_4) \underset{D}{=} \langle z_1 + z_4, z_2 + z_3\rangle, \tag{19}$$

$$(z_3, z_4) + \langle z_1, z_2\rangle \underset{D}{=} \langle z_3 + z_1, z_4 + z_2\rangle, \tag{20}$$

из которых следует, что сложение разнородных пар в общем случае некоммутативно. Эта некоммутативность имеет место даже и в том случае, когда одна из пар является символом скрещенного соединителя. В самом деле, из (19) и (20) следует

$$\langle 0, 0\rangle + (z_1, z_2) = \langle z_2, z_1\rangle, \tag{21}$$

$$(z_1, z_2) + \langle 0, 0\rangle = \langle z_1, z_2\rangle. \tag{22}$$

Из этих равенств следует, что $<0, 0> + (z_1, z_2) \neq (z_1, z_2) + <0, 0>$ при $z_1 \neq z_2$. Таким образом, небезразлично, на входе или на выходе прямопроводящей схемы (z_1, z_2) произвести скрещение проводов.

Матричные представления $-\mathbf{I}\cdot\mathbf{A}^+$ и $\mathbf{A}^+\cdot(-\mathbf{I})$ соответствующих 2—P-схем $<0, 0> + <z_1, z_2>$ и $(z_1, z_2) + <0, 0>$ не обнаруживают (см. (7)) различий между этими схемами из-за того, что единственный элемент матрицы $\mathbf{A}^+$, зависящий от z_1 и z_2, имеет вид $a_2 = z_1 + z_2$ и, следовательно, оказывается одним и тем же для схем (z_1, z_2) и (z_2, z_1).

Исходя из физических соображений, равенство между разнородными парами $<z_1, z_2>$ и (z_1, z_2) определим лишь для случая, когда $z_1 = z_2 = \infty$, т. е. примем

$$\langle\infty, \infty\rangle \underset{D}{=} (\infty, \infty), \tag{23}$$

$$\langle z_1, z_2\rangle \underset{D}{=} (z_1, z_2),$$

если $z_1 \neq \infty$ или $z_2 \neq \infty$.

В силу этого определения и определений равенств однородных пар, 2—P-схемы $(\infty, 0)$, $(0, \infty)$, $(0, 0)$, (∞, ∞), $<\infty, 0>$, $<0, \infty>$, $<0, 0>$ попарно различны. Это утверждение можно проверить, начертив соответствующие схемы.

Легко проверить также, что принятое нами определение (23) не противоречит равенствам (18)—(20) и потому в дальнейшем мы имеем право не различать символы $<\infty, \infty>$ и (∞, ∞).

Интуитивно совершенно очевидно, что пустая 2—P-цепь является универсально-поглощающим элементом в каскадных соединениях прямо- и накрест-проводящих 2—P-цепей. Матричными методами этого показать нельзя, так как основная матрица пустой 2—P-цепи является не вполне определенной, а правило умножения такого рода матриц на какие-либо матрицы не определено. Однако это легко сделать, используя изложенные выше методы представления каскадных соединений посредством импедансно-векторных символов.

Из (18) и (12) следуют равенства

$$\langle\infty,\infty\rangle + \langle z_1, z_2\rangle = (\infty,\infty) = \langle z_1, z_2\rangle + \langle\infty,\infty\rangle, \qquad (24)$$

аналогичные равенствам (16). В силу (23) эти равенства эквивалентны следующим:

$$(\infty,\infty) + \langle z_1, z_2\rangle = (\infty,\infty) = \langle z_1, z_2\rangle + (\infty,\infty). \qquad (25)$$

Совокупность равенств (16) и только что полученных как раз и выражает то утверждение, которое приведено выше как интуитивно совершенно очевидное.

Итак, схема (∞, ∞) является *универсально-поглощающим элементом*, а схема $(0, 0)$ — *нейтральным элементом* в каскадных соединениях прямо- и накрест-проводящих 2—P-схем.

Условимся основную матрицу 2—P-схемы S обозначать символом $\mathbf{A}_S$. Между схемами S_1 и S_2 и соответствующими вполне определенными матрицами $\mathbf{A}_{S_1}$ и $\mathbf{A}_{S_2}$ существует следующее соответствие: если $S_1 = S_2$, то $\mathbf{A}_{S_1} = \mathbf{A}_{S_2}$.

Обратное утверждение ложно, ибо это соответствие не взаимооднозначное. Каждой матрице $\mathbf{A}_S$ соответствует не одна схема S, а целый класс схем, равных данной схеме S. Так, матрицам $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}_{z_1, z_2}$ и $\mathbf{A}^- = \mathbf{A}_{\langle z_1, z_2\rangle}$ соответствуют, как видно из формул (8) и (9), следующие классы схем:

класс прямо-проводящих схем

$$(z_1, z_2),\quad (z_2, z_1),\quad (z_1 + z_2, 0),\quad (0, z_1 + z_2), \ldots$$

и класс накрест-проводящих схем

$$\langle z_1, z_2\rangle,\quad \langle z_2, z_1\rangle,\quad \langle z_1 + z_2, 0\rangle,\quad \langle 0, z_1 + z_2\rangle, \ldots$$

у которых $z_1 + z_2 = \mathrm{const}$.

Если, в частности, $z_1 + z_2 = 0$, то матрицы $\mathbf{A}^+$ и $\mathbf{A}^-$ становятся матрицами $\mathbf{I}$ и $-\mathbf{I}$. Простейшими схемами с этими основными матрицами являются схемы $(0, 0)$ и $<0, 0>$.

Другим предельным случаем является случай, когда $z_1 + z_2 = \infty$. Тогда матрицы $\mathbf{A}^+$ и $\mathbf{A}^-$ вырождаются в не вполне определенные матрицы, а соответствующие этим матрицам схемы содержатся в классе

$$(\infty,\infty),\ (\infty, 0),\ (0, \infty),\ (z_1 + \infty, 0), \ldots$$

и соответственно в классе

$$\langle\infty,\infty\rangle,\ \langle\infty, 0\rangle,\ \langle 0, \infty\rangle,\ \langle z_1 + \infty, 0\rangle, \ldots$$

Поскольку операция умножения матриц $\mathbf{A}^+$ и $\mathbf{A}^-$ в этом случае не определена, мы фактически не имеем возможности использовать их как матричные представления прямо- и накрест-проводящих схем и их каскадных соединений при $z_1 + z_2 = \infty$.

Остается, таким образом, единственная возможность — производить алгебраические операции непосредственно над символами пар вида (z_1, z_2) и $<z_1, z_2>$, не прибегая к матричным представлениям этих схем и их каскадных соединений. В пределах данной статьи мы не можем привести примеры применения этих методов алгебраического представления переключательных схем для их анализа и синтеза. Отметим лишь, что выключатели или контакты реле, находящиеся в одной из ветвей 2—P-схемы, могут быть представлены символами $(z, 0)$ и $(0, z)$, а рубильник — символом (z, z), где z — переменная, принимающая лишь два значения — 0 или ∞. Двухпозиционный коммутатор является переменной 2—P-схемой. Переключение его заключается в переходе от значения $(0, 0)$ к значению $\langle 0, 0 \rangle$ или обратно. Трехпозиционный же коммутатор может, кроме того, находиться еще в нейтральной позиции когда он представляет собой пустую 2—P-схему.

Автор выражает глубокую признательность проф. В. А. Ильину за интерес к работе, критические замечания и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карни Ш. Теория цепей. М., 1973.
2. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. М., 1967.

Поступила в редакцию
19.1 1975 г.

Кафедра
общей физики для физиков