Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1976

Г. А. БЕНДРИКОВ, Г. А. СИДОРОВА

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПО КРИТЕРИЮ В. М. ПОПОВА

Частотный критерий устойчивости Попова записывается в аналитическом виде с помощью общих формул. Преобразованное уравнение Попова исследуется методом траекторий корней. Устойчивость определяется по расположению основных точек корневого годографа в зависимости от свободных параметров q и k.

Известно [1], что достаточным условием абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейной системы, удовлетворяющей условиям, изложенным ниже, является выполнение частотного критерия В. М. Попова. На рис. 1 нелинейная система представлена в виде нелинейного элемента с характеристикой $y=f(\sigma)$ и линейной части с передаточной функцией:

$$W(p)=\frac{\Psi_m(p)}{\Phi_n(p)} \qquad (1)$$

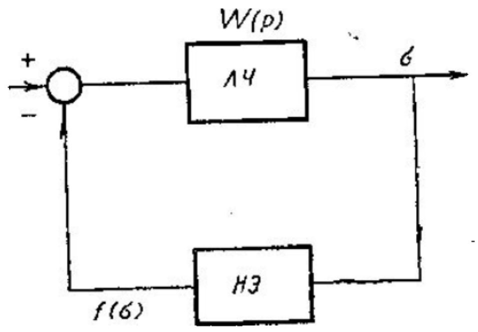

Рис. 1

(K — коэффициент усиления; $n \geqslant m$),

$$\Phi_n(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n; \quad \Psi_m(p)=b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_m. \qquad (2)$$

В основном случае линейная часть системы устойчива, т. е. полюсы $W(p)$ расположены слева от мнимой оси плоскости $p=\delta+i\omega$. В особых случаях часть полюсов (с кратностью, не превышающей двух) может находиться на мнимой оси. Характеристика нелинейного элемента предполагается однозначной и нечетной, причем в основном случае

$$0\leqslant\frac{f(\sigma)}{\sigma}\leqslant k \text{ и в особых } -\varepsilon\leqslant\frac{f(\sigma)}{\sigma}\leqslant k,$$

где k — конечное положительное число или бесконечность, ε — сколь угодно малое положительное число. Учитывая сказанное, сформулируем критерий Попова [1—4, 5].

Положение равновесия системы, изображенной на рис. 1, абсолютно устойчиво в конечном угле $[0, k]$ и $[\varepsilon, k]$, соответственно в основном и в особых случаях, если существует конечное действительное число q, при котором для всех $\omega \geqslant 0$ выполняется соотношение

$$\operatorname{Re}\left[(1 + iq\omega) W(i\omega) + \frac{1}{k} \right] \geqslant 0, \tag{3}$$

и если, кроме того, в особых случаях выполняются условия предельной устойчивости [1]. При $\frac{1}{k} = 0$ (в бесконечном угле) число q должно быть неотрицательным.

Обычно соотношения (3) представляют геометрически на плоскости в виде видоизмененной частотной характеристики [2, 3]. При всей наглядности, этот метод требует большого объема вычислений и индивидуального решения каждой конкретной задачи. Непосредственная аналитическая проверка соотношений (3) представляет сложную задачу.

В работе [4] локализация положительных вещественных корней полинома в левой части соотношений (3) исследуется в основном по теореме Декарта, что значительно сужает класс найденных устойчивых систем. Метод траекторий корней для данной задачи был применен в [6, 7]. Однако возможности метода в этих работах использованы недостаточно. Для решения задачи необходимо построение и рассмотрение полного корневого годографа системы [8].

В данной статье исследование устойчивости проводится на основе анализа взаимного расположения основных и кратных точек траекторий корней преобразованного уравнения Попова в сочетании с построением годографа параметра. Соотношения Попова (3) преобразуются к аналитическому виду с помощью общих формул для коэффициентов характеристического уравнения линейной части системы [9]. Подобный подход позволяет получить ряд общих закономерностей для систем сколь угодно высоких порядков. Устойчивость конкретных систем исследуется с минимальными вычислениями, особенно в случае бесконечного угла. В случае ограниченного угла задания нелинейности задача усложняется. Однако и здесь метод траекторий корней позволяет качественно исследовать ряд систем.

Представим передаточную функцию (1) линейной части разомкнутой системы класса $[n; m]$ в виде [9]:

$$W(p)\big|_{p=i\omega} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{l} A_{2i}\omega^{2i} + i\sum\limits_{i=0}^{r} C_{2i+1}\omega^{2i+1}}{\sum\limits_{i=0}^{n} B_{2i}\omega^{2i}}, \tag{4}$$

где

$$A_{2i} = (-1)^i \sum_{j=0}^{2i} (-1)^j a_{n-j} b_{m-2i+j}; \quad C_{2i+1} = (-1)^i \sum_{j=0}^{2i+1} (-1)^j a_{n-j} b_{m+j-(2i+1)}; \tag{5}$$

$$B_{2i} = (-1)^i \left\{ \sum_{j=0}^{j<i} 2\left[(-1)^{2i-j} a_{n-j} a_{n-2i+j}\right] + (-1)^i a_{n-i}^2 \right\}; \ i, j = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots, \tag{6}$$

$$l = \begin{cases} \frac{n+m}{2}, & (n+m) \text{ четное} \\ \frac{n+m-1}{2}, & (n+m) \text{ нечетное} \end{cases} \qquad r = \begin{cases} \frac{n+m-2}{2}, & (n+m) \text{ четное} \\ \frac{n+m-1}{2}, & (n+m) \text{ нечетное} \end{cases} \tag{7}$$

и индексы при коэффициентах a и b — положительные числа или нули. После подстановки (4) в условия Попова (3) и замены переменных $\omega^2 = x$ получаем новую запись критерия

$$f(x) \equiv A(x) - qC(x) + \frac{1}{k} B(x) \geqslant 0 \text{ для всех } x \geqslant 0, \tag{8}$$

где

$$A(x) = \sum_{i=0}^{l} A_{2i} x^i; \quad B(x) = \sum_{i=0}^{n} B_{2i} x^i; \quad C(x) = \sum_{i=0}^{r} C_{2i+1} x^{i+1}. \tag{9}$$

Коэффициенты A_{2i}, B_{2i}, C_{2i+1} по-прежнему находятся из формул (5) — (7).

Таким образом, задача сводится к исследованию неотрицательности полинома $f(x)$ в левой части соотношений (8). Известно [10], что полином $f(x)$ неотрицателен, если и только если выполняются условия:

А. $f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$;

Б. $f(x)$ не имеет положительных вещественных корней, за исключением совпадающих корней четной кратности.

(Возможность $f(x) \equiv 0$ здесь интереса не представляет и из рассмотрения исключается.) Исследование проводится отдельно для случаев бесконечного и ограниченного угла задания нелинейности.

Случай бесконечного угла $1/k = 0$, $q = 0$

Задача состоит в том, чтобы найти такое действительное число $q \geqslant 0$, при котором для всех $x \geqslant 0$ выполнялось бы соотношение

$$A(x) - qC(x) \geqslant 0. \tag{10}$$

Для выполнения условия А коэффициент при старшем члене полинома в левой части неравенства (10) должен быть положителен. Тогда с учетом формул (5) — (7) получаем следующие соотношения:

1) $q = 0$,

$$\begin{aligned} &(n+m) \text{ четное } (-1)^{\frac{3n+m}{2}} > 0, \\ &(n+m) \text{ нечетное } (-1)^{\frac{3n+m-1}{2}} (a_0 b_1 - a_1 b_0) > 0; \end{aligned} \tag{11}$$

2) $q > 0$,

$$\begin{aligned} &(n+m) \text{ четное } (-1)^{\frac{3n+m}{2}} [a_0 b_0 + q(a_0 b_1 - a_1 b_0)] > 0, \\ &(n+m) \text{ нечетное } (-1)^{\frac{3n+m+1}{2}} > 0. \end{aligned} \tag{12}$$

В результате простого исследования выражений (11), (12) все системы с линейной частью класса $[n; m]$ разделяются на четыре группы (табл.). Каждой группе соответствует свой интервал значений q, при

I $(n+m)$ четное [0;0] [4;0] [8;0] [12;0].... $\frac{3n+m}{2}$ четное [1;1] [5;1] [9;1] [13;1].... [2;2] [6;2] [10;2] [14;2].... [3;3] [7;3] [11;3] [15;3].... . . . . А выполняется: при $q=0$ и $q>0$, если $a_0b_1>a_1b_0$ при $0<q<\frac{a_0b_0}{a_1b_0-a_0b_1}$, если $a_0b_1<a_1b_0$	**III** $(n+m)$ нечетное [1;0] [5;0] [9;0] [13;0].. $\frac{3n+m-1}{2}$ нечетное [2;1] [6;1] [10;1] [14;1].. [3;2] [7;2] [11;2] [15;2].. [4;3] [8;3] [12;3] [16;3].. . . . . А выполняется: при $q=0$, если $a_0b_1<a_1b_0$ и $q>0$,
II $(n+m)$ четное [2;0] [6;0] [10;0] [14;0].... $\frac{3n+m}{2}$ нечетное [3;1] [7;1] [11;1] [15;1].... [4;2] [8;2] [12;2] [16;2].... [5;3] [9;3] [13;3] [17;3].... . . . . А выполняется при $q>\frac{a_0b_0}{a_1b_0-a_0b_1}$ если $a_0b_1<a_1b_0$ А не выполняется при $q>0$, если $a_0b_1>a_1b_0$ и $q=0$	**IV** $(n+m)$ нечетное [3;0] [7;0] [11;0] [15;0].. $\frac{3n+m-1}{2}$ четное [4;1] [8;1] [12;1] [16;1].. [5;2] [9;2] [13;2] [17;2].. [6;3] [10;3] [14;3] [18;3].. . . . . А выполняется при $q=0$, если $a_0b_1>a_1b_0$ А не выполняется при $q=0$, если $a_0b_1<a_1b_0$ и $q>0$,

которых выполняется условие А. Как видно из табл., таких значений $q\geqslant 0$ не существует для систем, линейная часть которых принадлежит группе II (если $a_0b_1>a_1b_0$) или группе IV (если $a_0b_1<a_1b_0$). Следовательно, без дальнейшего анализа можно утверждать, что для указанных систем критерий Попова в бесконечном угле не выполняется.

Проверка условия Б сводится к исследованию поведения корней уравнения (10) с одним свободным параметром на положительной действительной оси $x\geqslant 0$. Для этого прежде всего находятся основные и кратные точки уравнения (10). Существенно, что здесь наиболее важно их взаимное расположение на положительной действительной оси, а не численное значение x в соответствующих точках. Заметим также, что кратные точки траекторий корней уравнения (10) совпадают с кратными точками на действительной оси уравнения

$$A(z)-qC(z)=0, \tag{13}$$

где $z=x+iy$ — комплексная переменная. Таким образом, в ряде случаев во избежание дополнительных вычислений для определения кратных точек можно качественно построить корневой годограф уравнения (13) на комплексной плоскости (x, iy).

После нахождения основных и кратных точек проводится разбиение положительной действительной оси на четные и нечетные траектории. В зависимости от знака, с которым свободный параметр q входит в уравнение (10), определять устойчивость будут либо четные, либо нечетные траектории. В дальнейшем будем называть такие траектории определяющими. По расположению основных и кратных точек на участках определяющих траекторий можно представить зависимость $q(x)=\frac{A(x)}{C(x)}$, т. е. годограф параметра уравнений (10) или (13) при действительных значениях переменной. При этом основные точки соответствуют нулевым и бесконечно большим значениям параметра q, а кратные точки — экстремальным значениям $q_{\text{экстр}}$. Очевидно, справедливо следующее утверждение.

Уравнение (10) не имеет положительных вещественных корней в том и только том случае, если имеется некоторая постоянная величина $q_0 \geqslant 0$, такая, что прямая $q(x) \equiv q_0$ не пересекает годограф параметра $q(x)$ ни при одном значении переменной $x \geqslant 0$.

На рис. 2 показаны возможные конфигурации основных точек и соответствующие зависимости $q(x)$. Предположим, что в данном случае

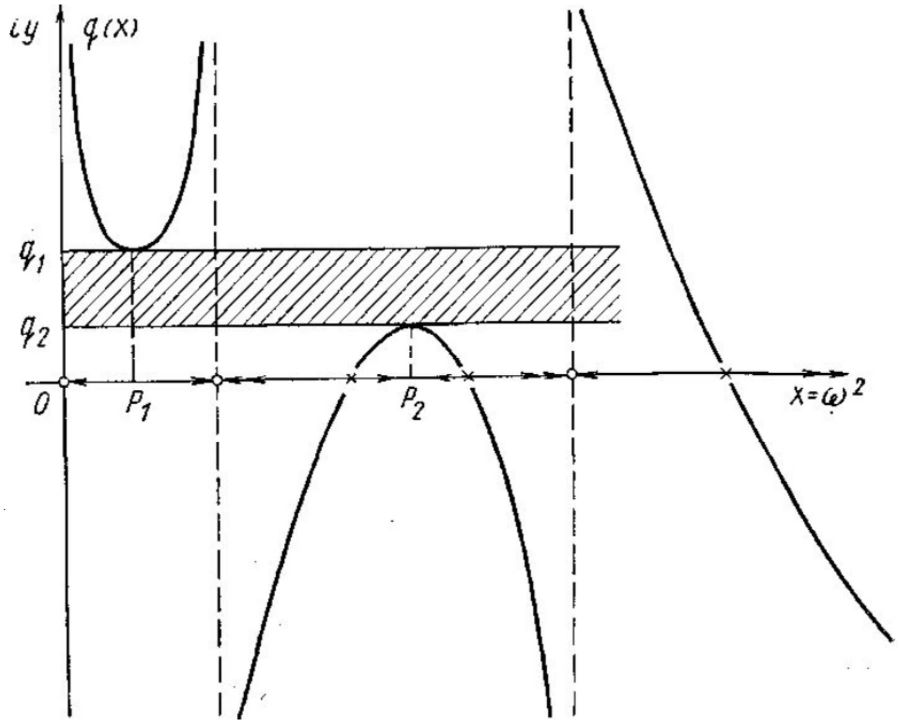

Рис. 2

определяющие траектории — нечетные. Тогда, как видно из рис. 2, для системы с подобным сочетанием основных точек при любом значении q имеется по крайней мере один корень уравнения (10). Иными словами, условие Б, а вместе с ним и критерий Попова не выполняются. Если же система такова, что отсутствуют крайние справа начальная и предельная точки, критерий выполняется при $q_2 < q < q_1$, где $q_1 = q_{\text{экстр}}(p_1)$, $q_2 = q_{\text{экстр}}(P_2)$, $x = P_1$ и $x = P_2$ — кратные точки. Вообще монотонный характер зависимости $q(x)$ на каком-либо из определяющих участков траекторий при всех $q \geqslant 0$ свидетельствует о невыполнении критерия Попова. Поэтому, например, сочетание основных точек предельная — начальная — предельная на полуоси $x \geqslant 0$ (в рассматриваемом случае $1/k = 0$) сразу говорит о невыполнении критерия без дальнейших вычислений.

Особенно важно представить годограф $q(x)$ на участках определяющих траекторий, полностью принадлежащих положительной действительной оси (без выхода в комплексную область в кратных точках). На таких участках необходимо найти $\lim\limits_{x \to +\infty} q(x)$ и сравнить его с величиной $q_{\text{экстр}}$. Заметим, что существование подобных ветвей траекторий, полностью принадлежащих действительной оси, рассматривается в работе [5] как признак невыполнения критерия Попова. Ниже приведен пример системы (пример 1), устойчивой несмотря на то, что определяющие траектории целиком принадлежат положительной действительной оси.

В уравнении (10) степени полиномов $A(x)$ и $C(x)$, как это следует из формул (7), равны соответственно $\frac{n+m}{2}$, $\frac{n+m}{2}$, если $(n+m)$ — четное, и $\frac{n+m-1}{2}$, $\frac{n+m+1}{2}$, если $(n+m)$ — нечетное. Отсюда следует, что описанная выше схема не требует машинных вычислений для систем с $(n+m)\leqslant 7$.

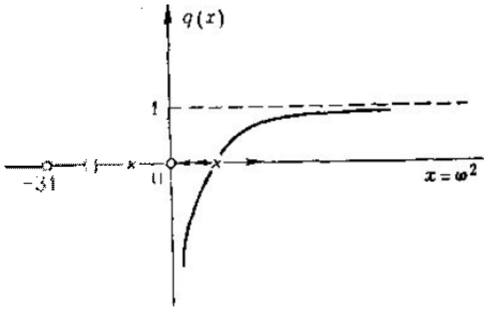

Рис. 3

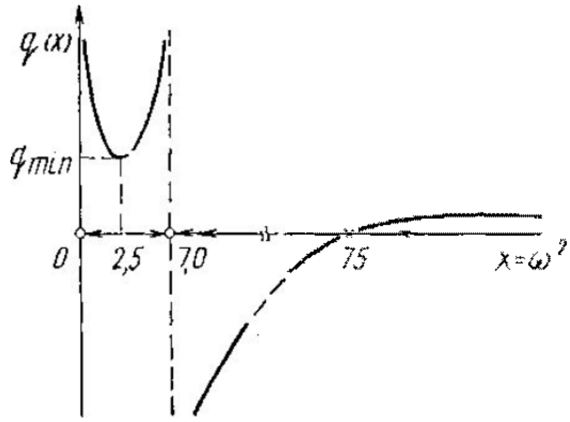

Рис. 4

Примеры.

1. Линейная часть имеет передаточную функцию

$$W(p)=\frac{p+4}{p^3+5p^2+9p+5}. \tag{14}$$

Требуется выяснить, устойчива ли нелинейная система, если нелинейная характеристика задана в бесконечном угле.

Для системы [3; 1] из формул (5)—(7) и (9) получаем полиномы

$$A(x)=a_3b_1-(-a_2b_0+a_1b_1)\,x-a_0b_0x^2,$$
$$C(x)=-x[x(a_1b_0-a_0b_1)-(a_3b_0-a_2b_1)].$$

После подстановки численных значений коэффициентов имеем

$$20-11x-x^2+qx(31+x)\geqslant 0. \tag{15}$$

Из условия А следует $q>1$. Из основных точек уравнения (15) справа на полуоси $x\geqslant 0$ находится одна начальная и одна предельная (нулевая) точка. На рис. 3 показаны траектории корней уравнения (15) и годограф параметра $q(x)$. На участке определяющих нечетных траекторий зависимость $q(x)$ имеет предел $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x)=1$. Следовательно, при $q>1$ условия Попова удовлетворяются. Таким образом, система абсолютно устойчива, несмотря на то что нечетные траектории полностью принадлежат положительной действительной оси (см. [5]). Пример подтверждает необходимость построения годографа параметра.

2. Требуется исследовать устойчивость нелинейной системы с линейной частью, имеющей передаточную функцию

$$W(p)=\frac{(p+1)(p+2)}{(p+3)(p+7)(p^2+8p+20)}. \tag{16}$$

Угол задания нелинейности бесконечен.

Находя полиномы $A(x)$ и $C(x)$ согласно формулам (5), (7), (9) для системы [4; 2] и подставляя их в уравнение (10), получаем

$$(840+442x+62x^2-x^3)-qx(524+41x-15x^2)\geqslant 0. \qquad (17)$$

Условие А выполняется при $q>0{,}07$. На рис. 4 показаны основные точки q-траекторий уравнения (17) при $x\geqslant 0$ и годограф параметра. Зависимость $q(x)$ имеет предел $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x)\approx 0{,}07$ на определяющих нечетных траекториях. В кратной точке $x=2{,}5$; $q_{\min}=1{,}7$. (Эти значения, а также положительный действительный корень уравнения начальных точек q-траекторий вычислялись на ЭЦВМ «Мир-1».) Таким образом, при $0{,}07<q<1{,}7$ критерий Попова выполняется и система с передаточной функцией (16) абсолютно устойчива в бесконечном угле.

3. Пусть

$$W(p)=\frac{p+5}{p^3+3p^2+2p}. \qquad (18)$$

Это — особый случай, так как система имеет один (нулевой) корень на мнимой оси. Условия предельной устойчивости выполняются, так как при $x>0$ предельных точек нет [11]. Далее, из (18) видно: $a_0b_1>a_1b_0$. Система имеет класс [3; 1] и относится к группе II (см. табл.). Критерий Попова не выполняется в бесконечном угле задания нелинейности.

Случай ограниченного угла $1/k\neq 0$, $-\infty<q<+\infty$

При исследовании устойчивости в этом случае исходными являются соотношения (8), (9) с формулами для коэффициентов характеристического уравнения (5)—(7). По-прежнему для удовлетворения критерия Попова должны выполняться условия А и Б. Из формул (5)—(9) находим, что при $(n+m)$ четном и $n>m$, x^n — старший член полинома $f(x)$. Коэффициент при нем $\frac{1}{k}a_0^2>0$ независимо от величины q. Если $n=m$, коэффициент при старшем члене:

$$a_0b_0+\frac{1}{k}a_0^2+q(a_0b_1-a_1b_0)>0.$$

Отсюда из условия А получаем для q и $1/k$:

$$a_0b_1>a_1b_0,\quad q>-\frac{a_0b_0+\frac{1}{k}a_0^2}{a_0b_1-a_1b_0};$$

$$a_0b_1<a_1b_0,\quad q<\frac{a_0b_0+\frac{1}{k}a_0^2}{a_1b_0-a_0b_1}.$$

Аналогично при $(n+m)$ нечетном, q может быть любым, если $n>m+1$. Если же $n=m+1$, $q>-\frac{1}{k}\frac{a_0}{b_0}$.

Проверка выполнения условия Б сводится к исследованию поведения корней уравнения с двумя свободными параметрами q и $1/k$:

$$A(x)-qC(x)+\frac{1}{k}B(x)=0. \qquad (19)$$

Постановка задачи об устойчивости нелинейной системы в ограниченном угле возможна в двух вариантах:

1. Решить вопрос об устойчивости системы при фиксированном угле задания нелинейности $[0, k]$.

2. Найти максимальный угол $[0, k_{\max}]$, в котором система абсолютно устойчива (Вторая задача Айзермана).

В первом случае уравнение (19) сводится к уравнению с одним свободным параметром, и исследование проводится аналогично случаю бесконечного угла.

Рассмотрим путь решения Второй задачи Айзермана с применением аппарата траекторий корней.

Из уравнения (19), согласно аналитическому методу траекторий корней [6], получаем уравнение, определяющее геометрическое место кратных точек q-траекторий корней уравнения (19):

$$(AC' - A'C) + \frac{1}{k}(BC' - B'C) = 0, \tag{20}$$

где

$$A = A(x); \quad A' = \frac{dA(x)}{dx} \text{ и т. д.}$$

Следовательно, геометрическим местом кратных точек q-траекторий корней уравнения (19) являются $1/k$-траектории уравнения (20). В свою очередь, кратные точки $1/k$-траекторий уравнения (20) находятся из уравнений

$$C(A''B' - A'B'') + A(C'B'' - C''B') + B(A'C'' - A''C') = 0,$$
$$C = 0, \tag{21}$$

где

$$A'' = \frac{d^2A(x)}{dx^2} \text{ и т. д.}$$

Подставляя корни уравнений (21) в уравнение (20), определяем значения $(1/k)_{\text{экстр}}$ в кратных точках q-траекторий корней уравнения (19). Затем находим минимальное из этих значений $(1/k)_{\text{экстр}}$, соответствующее устойчивой конфигурации основных и кратных точек q-траекторий уравнения (19).

С учетом (8), (9) и (11) находим, что степени полиномов, входящих в первое из уравнений (21), одинаковы и равны $2n+m-3$. Это высокий порядок даже для малых значений n, m. Поэтому при исследовании абсолютной устойчивости в ограниченном угле необходимо использовать счетную машину. Возможны и другие способы исследования уравнения (19) — например методом сеток или по критерию Шиляка для нахождения числа положительных вещественных корней полинома $f(x)$ [6, 10].

Представленная схема применима для исследования абсолютной устойчивости разнообразных систем автоматического регулирования. Приведем два примера. В примере 1 исследуется абсолютная устойчивость при наперед заданном угле $[0, k]$. В примере 2 показано, как путем качественного анализа определить максимальный угол устойчивости в особом случае для системы класса [3; 1].

Примеры

1. Нелинейная функция задана в угле $[0, 2]$. Определить, будет ли абсолютно устойчива система с передаточной функцией линейной части:

$$W(p)=\frac{K}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)},\qquad (22)$$

где

$$K=25;\quad T_1=0{,}5,\quad T_2=0{,}02,\quad T_3=0{,}01\ \text{с}.$$

(В [2] этот пример исследуется методом построения видоизмененной частотной характеристики.)

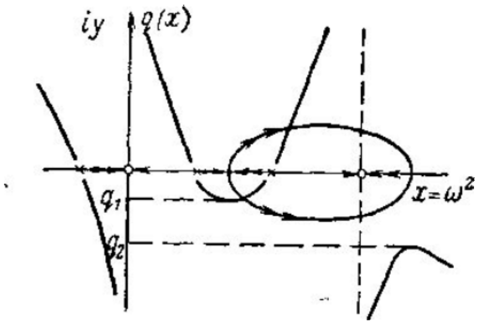

Рис. 5

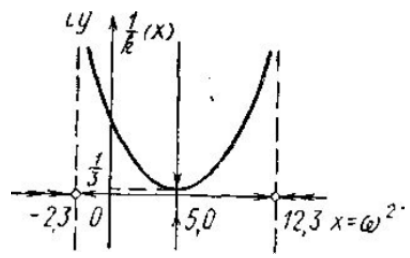

Рис. 6

Для системы класса [3; 0] из формул (5)—(9) имеем полиномы

$$A(x)=(a_3-a_1x)\,b_0;\quad C(x)=(-a_2b_0+a_0b_0x)\,x;$$

$$B(x)=a_3^2-(2a_3a_1-a_2^2)\,x+(-2a_2a_0+a_1^2)\,x^2+a_0^2x^3.$$

Подставляя численные значения коэффициентов в уравнение (19), имеем

$$x^3+12504x^2-5095\cdot10^4x+51\cdot10^8-q\cdot50\cdot10^4x(x-5300)\geqslant0\qquad (23)$$

(q может быть любым: $(n+m)$ — нечетное, $n>m+1$).

Исследуя уравнение начальных точек по критерию Шиляка [10], получаем, что оно имеет два положительных и один отрицательный корень на действительной оси. Верхней границей положительных действительных корней уравнения начальных точек является число $x=5000$ [12].

Исходя из этих соображений, располагаем основные точки уравнения (23) на положительной действительной оси так, как показано на рис. 5, и проводим разбиение действительной оси на четные и нечетные траектории. Далее приближенно строятся траектории корней и годограф параметра $q(x)$. Из рисунка видно, что уравнение (23) не имеет положительных действительных корней при всех $x\geqslant0$ для отрицательных значений q, $|q_1|<|q|<|q_2|$. Следовательно, система (22) абсолютно устойчива в угле [0, 2]. Заметим, что построение видоизмененной частотной характеристики [2] более трудоемко.

2. Вернемся к системе, линейная часть которой имеет передаточную функцию (18). Найдем максимальный угол $[0,\ k_{\max}]$, в котором система абсолютно устойчива. Для данной системы класса [3; 1] преобразованные условия Попова имеют вид

$$(13+x)+2q(x-5)-\frac{1}{k}(x^2+5x+4)\geqslant0.\qquad (24)$$

Уравнение (20) для кратных точек q-траекторий имеет вид

$$18+\frac{1}{k}(x^2-10x-29)=0\qquad (25)$$

($1/k$ — траектории уравнения (25) показаны на рис. 6). Нечетные траектории, соответствующие положительным значениям $1/k$, имеют кратную точку при $x=5$. На рис. 6 построен также (качественно) годограф параметра $\frac{1}{k}=\frac{1}{k}(x)$. В точке $x=5$, $\left(\frac{1}{k}\right)_{\min}=\frac{1}{3}$. Отсюда $k_{\max}=3$, $q=\infty$. Итак, система абсолютно устойчива в угле [0, 3]. Заметим, что здесь допустимо значение $q=\infty$, согласно теореме (см. [1], стр. 118) для простейшего особого случая.

В заключение отметим, что в данной работе представлен метод исследования абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейной системы по критерию В. М. Попова. Применение аппарата траекторий корней позволяет: 1) записать условия Попова аналитически, в общем виде для систем класса $[n, m]$; 2) установить ряд общих закономерностей для систем любых порядков (в том числе и сколь угодно больших) и 3) провести качественное построение годографа параметра. При этом условия Попова представляются наглядно, все исследование значительно облегчается, вычисления сводятся до минимума.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М., 1963.
2. Фатеев А. В., Вавилов А. А. и др. Расчет автоматических систем. М., 1973.
3. Наумов Б. Н. Теория нелинейных автоматических систем. М., 1972.
4. Смольников Л. П., Бычков Ю. А. Расчет кусочнолинейных систем. Л., 1972.
5. Ramapriyan H. K., Srinath M. D., Thathachar. M. A. L. «J. Control», 3, 149—161, 1966.
6. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., 1964.
7. Зайцев В. М. Автоматизация анализа динамических свойств систем управления на основе общей теории корневых траекторий. Автореферат кандидатской диссертации. Минск, 1974.
8. Бендриков Г. А., У. Фонсека Араухо. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 14, № 1, 60—68, 1973.
9. Бендриков Г. А., У. Фонсека Ураухо. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 14, № 2, 166—176, 1973.
10. Šiljak D. D. «J. Frank. Inst.», 291, No. 2, 1971.
11. Теодорчик К. Ф., Филимонов Л. Т. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 3, 60—64, 1967.
12. Мишина А. П., Проскуряков И. В. Высшая алгебра. М., 1965.

Поступила в редакцию
18.2 1974 г.

Кафедра
физики колебаний