

ВУ АНЬ ФИ, В. И. МЕДВЕДЕВ

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОЦЕССА УСТАНОВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ГЕНЕРАТОРЕ (ПГ) С АВТОСМЕЩЕНИЕМ

Методом вторичного укорочения проведены приближенные решения системы укороченных дифференциальных уравнений для одноконтурного ПГ с автосмещением. Получены приближенные аналитические выражения для описания процессов установления в ПГ с автосмещением при учете одновременного действия трех механизмов ограничения амплитуды колебаний (без учета инерционности цепи автосмещения). Некоторые аналитические расчеты сравниваются с численными расчетами и экспериментами.

Для успешного применения параметронов в ЭВМ важно знать не только стационарные, но и переходные процессы в параметронах. Известны работы, посвященные изучению переходных процессов в параметрических генераторах с каким-либо одним конкретным механизмом ограничения колебаний. Обычно проводятся численные решения укороченных уравнений на ЭВМ [1, 2]. Аналитические исследования переходных процессов при решении укороченных уравнений связаны со значительными трудностями. Они оказались возможными только для исследования переходных процессов в системах с чисто диссипативными механизмами ограничения, поскольку в таких системах укороченные уравнения для амплитуды и фазы разделяются [3—5]. Для системы с нелинейными реактивными элементами получены лишь приближенные аналитические выражения [6—8].

Переходные процессы в реальном ПГ с автосмещением отличаются большой сложностью, поскольку в этой системе одновременно действуют различные механизмы амплитудного ограничения (диссипативный, расстройный, ограничение за счет автоматического смещения). Поскольку переходные процессы в ПГ с автосмещением мало исследованы, то в данной работе проведены приближенные аналитические решения системы укороченных уравнений ПГ с автосмещением при учете комбинированного действия трех механизмов ограничения амплитуд колебаний.

При этом расчеты переходного процесса для ПГ с автосмещением проведены для случая, когда можно пренебречь влиянием инерционности цепи смещения ($\sigma \gg 1$, где σ — отношение постоянной времени контура ПГ к постоянной времени цепи автосмещения), т. е. рассматривается случай, когда инерционность цепи смещения мала, и эта цепь

вызывает лишь дополнительное смещение, которое в первую очередь оказывает влияние на изменение расстройки системы. Согласно этому условию напряжение смещения принимает значение $h = \kappa p^2$ [9], и тогда в основу дальнейших расчетов берется система из двух укороченных уравнений для амплитуды p и фазы φ :

$$\frac{dp}{d\tau} = p[-(1 + \alpha p^2) + K \cos 2\varphi], \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = -h_0 + (\kappa - \beta) p^2 - K \sin 2\varphi, \quad (2)$$

где K — коэффициент модуляции реактивного параметра, h_0 — нулевая расстройка, α , β , κ — коэффициенты нелинейности характеристик.

В системе (1), (2) все параметры нормированы по затуханию. Эта система аналогична системе уравнений, описывающей ПГ с диссипативным и расстроечным механизмом ограничения амплитуд; отличие состоит в том, что в этой системе стоит коэффициент $(\kappa - \beta)$, характеризующий расстроечный механизм ограничения разного знака, в зависимости от соотношения β и κ . При $\alpha = 0$, $\kappa > \beta$ в генераторе действует расстроечный механизм, ограничивающий за счет автосмещения; а при $\alpha = 0$, $\beta > \kappa$ действует чисто расстроечный механизм ограничения. При $\kappa = \beta$ в генераторе действует чисто диссипативный механизм ограничения.

Процесс установления для линейного этапа описывается системой, получающейся из (1) и (2) отбрасыванием нелинейных членов. Установление фазы протекает в два этапа (начальный и линейный). Процесс установления амплитуды происходит в основном, когда фаза уже достигла линейного стационарного значения. В этом случае легко получить выражения для описания процессов установления амплитуды и фазы на линейном этапе

$$p = A_0 e^{(-1 + \sqrt{\kappa^2 - h_0^2}) \tau}, \quad (3)$$

$$\theta = \arctg(\operatorname{tg} \varphi_H e^{-2\kappa\tau}). \quad (4)$$

Более интересны нелинейные этапы установления, где коэффициенты α , β , κ играют существенную роль. Рассмотрим нелинейный этап установления в ПГ с автосмещением. Для этого надо решить систему (1), (2). Строго аналитически система (1), (2) не решается, так как уравнения для амплитуды и фазы взаимосвязаны. Однако, следуя [7], при наличии в системе (1), (2) какого-либо малого параметра мы можем разложить правую часть этих уравнений по этому малому параметру и произвести вторичное укорочение. Рассмотрим малое возмущение y около стационарной фазы, где значения стационарной амплитуды и фазы определяются из системы (1), (2) при $p = \dot{\varphi} = 0$:

$$p_0^2 = \frac{h_0 + K \sin 2\varphi_0}{\kappa - \beta}, \quad (5)$$

$$1 + \frac{\alpha}{\kappa - \beta} (h_0 + K \sin 2\varphi_0) - K \cos 2\varphi_0 = 0.$$

Тогда зависимость стационарной амплитуды от параметров генератора выразится

$$p_0^2 = \frac{h_0(\kappa - \beta) - \alpha \pm \sqrt{K^2[(\kappa - \beta)^2 + \alpha^2] - [\alpha h_0 + (\kappa - \beta)^2]}}{\alpha^2 + (\kappa - \beta)^2}. \quad (6)$$

Приводя систему (1), (2) к одному уравнению второго порядка относительно фазы, получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{d\varphi}{dt} = & - \left[4 \frac{\alpha h_0}{\kappa - \beta} + 4 \frac{\alpha K \sin 2\varphi}{\kappa - \beta} \right] \frac{d\varphi}{dt} - \\ & - \left[-2K - \frac{2\alpha K^2}{\kappa - \beta} \sin 2\varphi - \frac{2\alpha h_0 K}{\kappa - \beta} + 2K^2 \cos 2\varphi \right] \sin 2\varphi - \\ & - \frac{2\alpha h_0}{\kappa - \beta} K \sin 2\varphi - \frac{2\alpha h_0^2}{\kappa - \beta} - 2h_0 + 2h_0 K \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть

$$\varphi = \varphi_0 + y. \quad (8)$$

Подставив (8) в (7), разлагая правую часть (7) по малому параметру y , сохраняя в первом приближении члены $\sim y, y^2, y^3$, воспользовавшись (5), получим следующее уравнение:

$$\ddot{y} + \Omega^2 y = Gy^3 - Fy^2 - (2 + E)\dot{y} - \frac{2\alpha}{\kappa - \beta} \dot{y}^2 = \mu f(y, y^2, y^3, \dot{y}), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega^2 = & 4 \left(K \sin 2\varphi_0 - \frac{\alpha}{\kappa - \beta} K \cos 2\varphi_0 \right) (h_0 + K \sin 2\varphi_0) \equiv \\ \equiv & -4[\alpha + h_0(\kappa - \beta)] p_0^2 + 4[(\kappa - \beta)^2 - \alpha^2] p_0^4; \\ G = & -8K \left[\frac{h_0}{3} \left(\sin 2\varphi_0 + \frac{\alpha}{\kappa - \beta} \cos 2\varphi_0 \right) + \right. \\ & + \frac{4}{3} K \sin 2\varphi_0 \left(\sin 2\varphi_0 + \frac{\alpha}{\kappa - \beta} \cos 2\varphi_0 \right) - \\ & \left. - K \cos 2\varphi_0 \left(\cos 2\varphi_0 - \frac{\alpha}{\kappa - \beta} \sin 2\varphi_0 \right) \right] \equiv \\ \equiv & -8 - 16 \frac{\alpha}{\kappa - \beta} h_0 + 8h_0^2 + 8 \left[\frac{\alpha}{3} - \frac{5}{3} (\kappa - \beta) h_0 \right] p_0^2 + \\ & + \frac{32}{3} [\alpha^2 + (\kappa - \beta)^2] p_0^4; \end{aligned} \quad (10)$$

$$E = \frac{4\alpha}{\kappa - \beta} \left[h_0 + K \sin 2\varphi_0 + 2K (\cos 2\varphi_0 y - \sin 2\varphi_0 y^2 - \frac{2}{3} \cos 2\varphi_0 y^3) \right];$$

$$\begin{aligned} F = & 4K \left[h_0 \left(\cos 2\varphi_0 - \frac{\alpha}{\kappa - \beta} \sin 2\varphi_0 \right) + \right. \\ & + 2K \cos 2\varphi_0 \left(\sin 2\varphi_0 + \frac{\alpha}{\kappa - \beta} \cos 2\varphi_0 \right) + \\ & \left. + K \sin 2\varphi_0 \left(\cos 2\varphi_0 - \frac{\alpha}{\kappa - \beta} \sin 2\varphi_0 \right) \right]. \end{aligned}$$

Решение (9) будем искать в виде

$$y = b \cos \psi, \quad (11)$$

где

$$\psi = \Omega \tau + \theta.$$

Подставляя (11) в (9), проведем стандартную процедуру укорочения, тогда получим систему укороченных уравнений для b и ψ и после интегрирования будем иметь

$$b^2 = \frac{mC_1^{2m} e^{-2m\tau}}{1 - nC_1^{2m} e^{-2m\tau}}, \quad (12)$$

$$\psi = \Omega \tau - \frac{3G}{16\Omega n} \ln |1 - nC_1^{2m} e^{-2m\tau}| + C_2, \quad (13)$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями (B_K), а

$$m = 1 + \frac{2\alpha}{\kappa - \beta} (h_0 + K \sin 2\varphi_0), \quad (14)$$

$$n = - \frac{\alpha}{\kappa - \beta} K \sin 2\varphi_0. \quad (15)$$

Подставляя (12), (13) в (11), а затем (11) в (8), получим выражение для фазы

$$\varphi = \varphi_0 + \sqrt{\frac{mC_1^{2m} e^{-2m\tau}}{1 - nC_1^{2m} e^{-2m\tau}}} \cdot \cos \left\{ \Omega \tau - \frac{3G}{16\Omega n} \ln |1 - nC_1^{2m} e^{-2m\tau}| + C_2 \right\}. \quad (16)$$

Значение амплитуды получается из (2) с учетом (16):

$$\begin{aligned} \rho^2 = & \rho_0^2 + \frac{1}{\kappa - \beta} \left\{ 2 \sqrt{\frac{mC_1^{2m} e^{-2m\tau}}{1 - nC_1^{2m} e^{-2m\tau}}} \times \right. \\ & \times K \cos 2\varphi_0 \cos \left\{ \Omega \tau - \frac{3G}{16\Omega n} \ln |1 - nC_1^{2m} e^{-2m\tau}| + C_2 \right\} - \\ & \left. - \Omega \sqrt{\frac{mC_1^{2m} e^{-2m\tau}}{1 - nC_1^{2m} e^{-2m\tau}}} \sin \left\{ \Omega \tau - \frac{3G}{16\Omega n} \ln |1 - nC_1^{2m} e^{-2m\tau}| + C_2 \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Полученные уравнения для амплитуды и фазы могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \rho^2(\tau) = & \rho_0^2 + 2K \cos 2\varphi_0 \cdot b(\tau) \cos \psi(\tau) - \Omega b(\tau) \sin \psi(\tau), \quad (18) \\ \varphi(\tau) = & \varphi_0 + b(\tau) \sin \psi(\tau), \end{aligned}$$

где $b(\tau), \psi(\tau)$ определяются из (12), (13). При получении выражения (17) мы отбросили члены $\sim b^2$, так как в силу разложения (9) начальные возмущения (y) должны быть достаточно близки к стационарным значениям фазы. Найденные решения остаются в силе для значений фаз, близких к стационарной фазе. Рассмотрим частные решения, выведенные из общего решения системы (18) для ПГ с автосмещением при

учете одновременного действия нескольких механизмов ограничения амплитуд.

Случай $\alpha=0$, $\beta=1$. В этом случае в системе (1) и (2) отсутствует нелинейное затухание: в генераторе действует расстроенный механизм ограничения и ограничение за счет автосмещения ($m=1$, $n=0$), тогда

$$\varphi(\tau) = \varphi_0 + C_1 e^{-\tau} \cos \left(\Omega \tau + \frac{3G}{16\Omega} C_1^2 e^{-2\tau} + C_2 \right),$$

$$\rho^2(\tau) = \rho_0^2 + \frac{1}{\kappa - \beta} \left\{ 2C_1 e^{-\tau} K \cos 2\varphi_0 \cos \left(\Omega \tau + \frac{3G}{16\Omega} C_1^2 e^{-2\tau} + C_2 \right) + \frac{3G}{16\Omega} C_1^2 e^{-2\tau} + C_2 \right\} - \Omega C_1 e^{-\tau} \sin \left(\Omega \tau + \frac{3G}{16\Omega} C_1^2 e^{-2\tau} + C_2 \right). \quad (19)$$

Ранее было получено выражение для процесса установления колебаний в ПГ с расстроенным механизмом ограничения колебания [6], которое является частным случаем общего решения, полученного в этой работе.

На рис. 1 построены процессы установления по формулам (16) и (17)

при $\alpha=0$, $\beta=1$, $\kappa=2$, $h_0=0$,

$$B_n^2 = -0,2B_0^2.$$

Процесс установления может носить как монотонный (кривая 3), так и осцилляторный характер (кривые 1 и 2). С ростом K растет амплитуда (а также частота осцилляции). Параметр K влияет также на длительность линейного этапа. Теоретические кривые, рассчитанные по аналитическим формулам (16) и (17) при приближенном решении системы (1) и (2) методом вторичного укорочения, качественно совпадают с кривыми, полученными нами из численных расчетов, описанных в другой работе. Частота осцилляций в первом приближении (без учета поправки) определяется выражением

$$\Omega = 2 \sqrt{K \sin 2\varphi_0 (K \sin 2\varphi_0 + h_0)} \ll \omega,$$

выражение для Ω через параметры ПГ имеет вид

$$\Omega = 2 \sqrt{K^2 - (\delta^2 + h_0 \sqrt{K^2 - \delta^2})}. \quad (20)$$

Для нулевой расстройки

$$\Omega \simeq 2 \sqrt{K^2 - \delta^2}. \quad (21)$$

(Везде δ в связи с нормировкой по затуханию равно единице.) На рис. 2, а построена зависимость частоты осцилляций по формуле (21) (кривая 2). Пунктирной линией (кривая 3) построена эта же зависимость из данных расчетов на ЭВМ. Из этого рисунка видно, что частоту

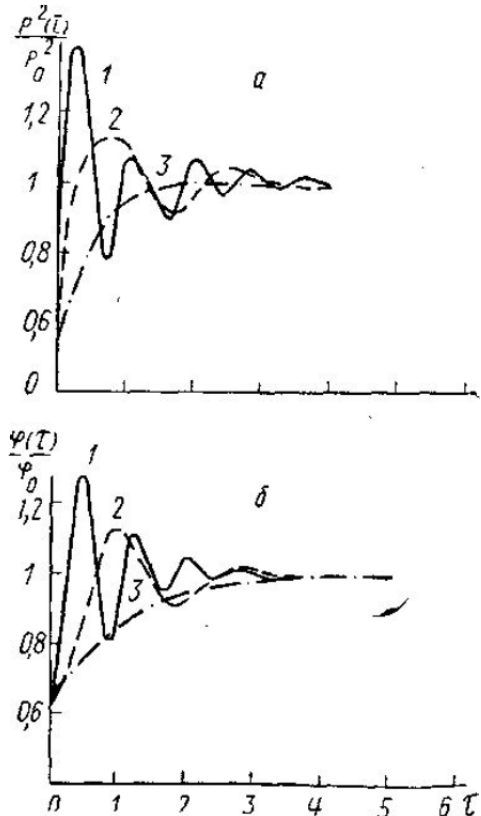


Рис. 1. Нелинейный этап установления $\rho(\tau)$: а — рассчитанный по формуле (16) и б — по формуле (17). 1 — для $K=4$, 2 — для $K=2$ и 3 — для $K=1,05$ ($\alpha=0$, $\beta=1$, $\kappa=2$, $h_0=0$, $B_n^2=0,2 B_0^2$)

Ω можно приближенно рассчитывать с помощью выражения (20), причем ошибка будет минимальной ($<20\%$) в интервале $1 \leq K \leq 4$. Случай $K=5$ уже соответствует частоте синусоидальной автомодуляции. Выражение для частоты осцилляций (20) совпадает с выражением для частоты биений в необращающем модуляторе [10] в отличие от [1], где для частоты осцилляций, порядок $\Omega \sim \sqrt{\frac{m}{2} - \delta}$. Качественно частота осцилляций растет с ростом K и с уменьшением δ . Зависимость частоты осцилляций от расстройки (h_0) показана на рис. 2, б.

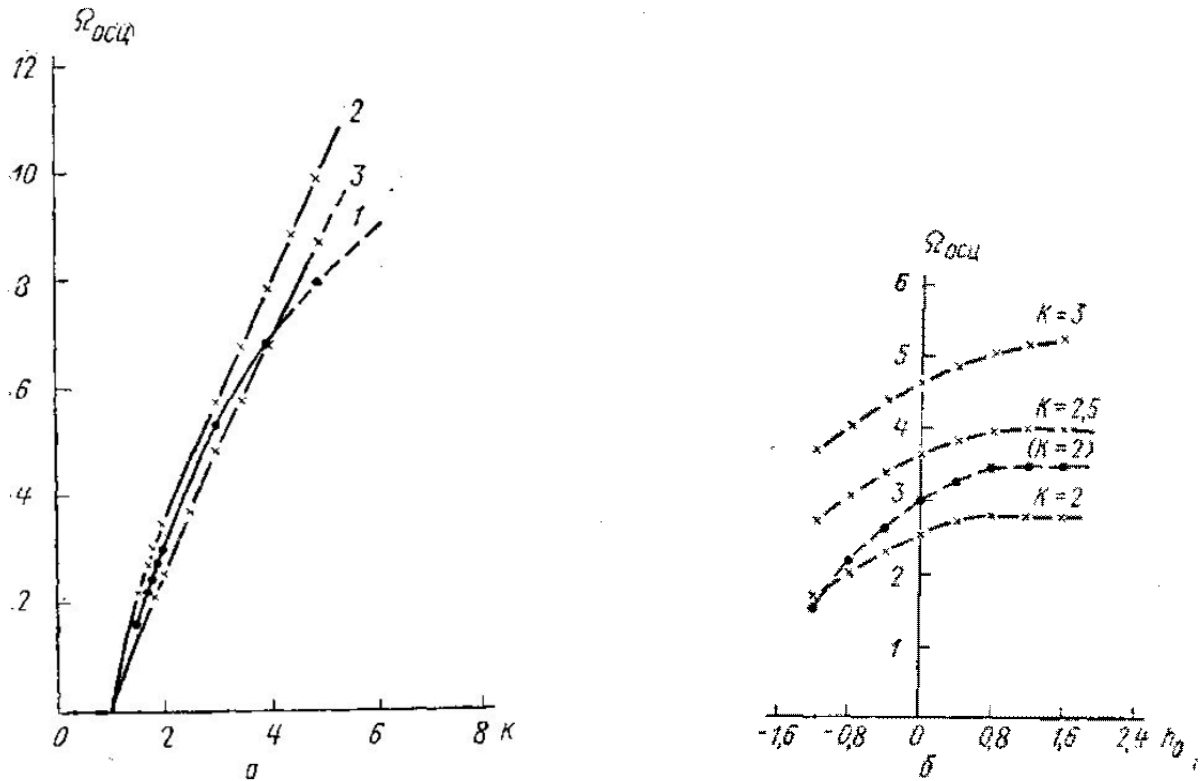


Рис. 2. Зависимость частоты осцилляций от K (а): 1 — расчет по формуле (10), 2 — по формуле $\Omega = 2 \sqrt{K^2 - 1}$ и 3 — численные расчеты на ЭВМ ($\alpha = 0,25$, $\kappa = 2$, $h_0 = 0$, $\sigma = 10$). Зависимость частоты осцилляций от расстройки h_0 ($\alpha = 0,25$, $\kappa = 2$, $\sigma = 10$) (б)

Сплошные кривые — расчеты по формуле (10), пунктирная кривая построена из данных расчетов на ЭВМ. Видно качественное совпадение результатов. Следуя [6], можно уточнить значение параметров и показать, что при $0 < \Omega^2 < \delta^2$ процесс установления носит монотонный характер, а при $\Omega^2 > \delta^2$ — осцилляторный характер.

Случай $\beta = 0$, $\alpha = 1$, $\kappa > 1$. В этом случае учитывается диссипативный механизм ограничения, но ограничение за счет автосмещения играет основную роль. При этом

$$m = \delta + \frac{2\alpha}{\kappa} \sqrt{K^2 - \delta^2},$$

$$n = -\frac{\alpha}{\kappa} \sqrt{K^2 - \delta^2},$$

$$\Omega \approx 2 \sqrt{K^2 - \delta^2 - \frac{3\alpha\delta}{\kappa} \sqrt{K^2 - \delta^2}}.$$
(22)

Видно, что κ влияет на характер процессов установления. На рис. 3, а показаны графики установления амплитуды на нелинейном этапе для различных значений κ . Подставляя значения (22) в (16), можно видеть, что с ростом κ коэффициент, стоящий перед \cos , уменьшается незначительно; члены же с \cos играют основную роль, и поэтому процесс установления имеет осцилляторный характер. Наоборот, при уменьшении κ коэффициенты m и n быстро увеличиваются, в (16) быстро затухает и $\varphi(\tau)$ стремится к стационарному значению без осцилляции.

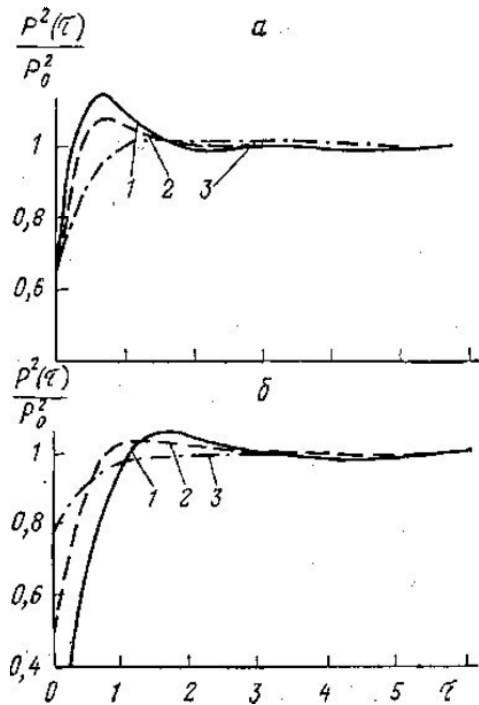


Рис. 3. Зависимость нелинейного этапа установления от κ : 1 — для $\kappa=4$, 2 — для $\kappa=4$ и 3 — для $\kappa=2$ (а); зависимость установления от h_0 : 1 — для $h_0=1,4$; 2 — $h_0=-0,6$; 3 — $h_0=0,4$; $\alpha \approx 0,7$; $k=2$; $\kappa=2$; $B_n^2=0,2B_0^2(\beta)$

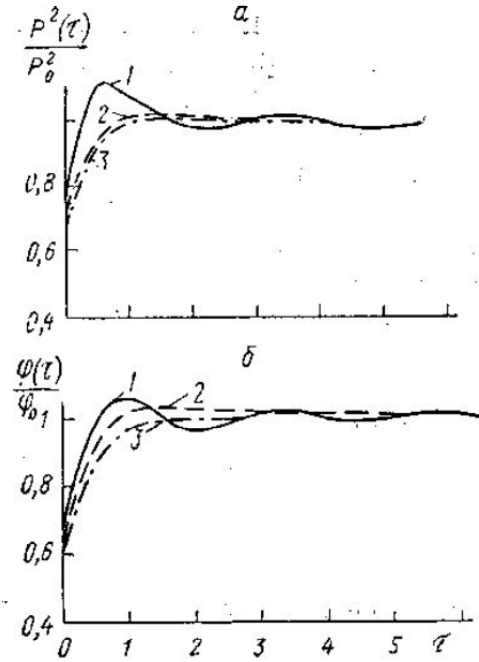


Рис. 4. Аналитическое построение зависимости амплитуды (а) и фазы (б) от изменения коэффициентов нелинейности α и β : 1 — для $\beta=0,98$, 2 — для $\beta=0,1$ и 3 — для $\beta=0$ ($\alpha=1$)

Случай $\kappa=\beta$, $\alpha \neq 0$. Нелинейная расстройка и расстройка, вызванная автосмещением, взаимно компенсируют друг друга. В генераторе действует диссипативный механизм ограничения. Действительно, при подстановке указанных значений параметров $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$. Для достаточно большого времени τ коэффициент, стоящий перед \cos в (16), стремится к нулю: $\varphi \rightarrow \varphi_0 \equiv \varphi_{0л}$, где $\varphi_{0л}$ определяется из $\sin 2\varphi_{0л} = -\frac{h_0}{K}$.

Процессы установления амплитуды и фазы к своим стационарным значениям происходят монотонно, без осцилляций. Такой характер установления для ПГ с диссипативным механизмом ограничения неоднократно описывался в литературе [1, 2, 3, 5].

Таким образом, меняя соотношение между коэффициентами нелинейности, можно получить различные режимы установления. Так, в случае $\kappa=0$, $\alpha=\beta$ имеет место совместное действие диссипативного и расстройочного механизмов ограничения.

В самом общем случае, когда α , β , κ одного порядка, m , n , Ω определяются из (14), (15), (10), а выражения для амплитуды и фазы от времени определяются системой (16), (17). На рис. 3, б построены зависимости (17) при изменении расстройки. Как видно из этого рисунка, линейная расстройка h_0 сильно меняет характер процессов установления только на линейном этапе. На нелинейном этапе может иметь место как монотонный, так и осцилляторный характер установления колебаний. На рис. 4, а, б построены графики процессов установления по формулам (16), (17) от изменения коэффициентов нелинейности β , (α). При $\beta \simeq 1$, ($\alpha \simeq 0$) процесс установления носит осцилляторный характер (кривая 1), при $\alpha = 1$, ($\beta = 0$) процесс установления носит монотонный характер (кривые 2, 3).

Таким образом, в данной работе получены приближенные аналитические выражения для описания нелинейного этапа установления в ПГ при одновременном действии диссипативного, расстройочного и за счет автосмещения механизмов ограничения, позволяющие рассчитывать переходные процессы в реальных ПГ с автосмещением. Результаты этих расчетов хорошо согласуются с результатами, полученными нами при численных расчетах процессов с помощью ЭВМ. Они дают объяснения особенностей установления стационарных режимов в ПГ при различных механизмах ограничения и их комбинаций, показывают количественную зависимость процессов установления амплитуды и фазы от изменения конкретных параметров ПГ, что необходимо при расчете и создании параметронов с автосмещением различного назначения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахманов С. А., Рошаль А. С. «Изв. вузов», радиофизика, 6, вып. 5, 1963.
2. Рылов В. А. Кандидатская диссертация. МГУ, 1964.
3. Мандельштам Л. И., Паллекси Н. Д. ЖЭТФ, 4, 67—74, 1934.
4. Рылов В. А. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астроном., № 2, 1963.
5. Ахманов С. А. «Изв. вузов», радиофизика, 4, вып. 4, 769, 1961.
6. Чёткин М. В. «Радиотехника и электроника», 7, 1444, 1962.
7. Хохлов Р. В. ДАН СССР, 75, 1954.
8. Самойленко С. И., Злочевский. «Изв. вузов», радиотехника, вып. 6, 640, 1961.
9. Но У., Siegman A. IRE, 459, 1961.
10. Карасев М. Д. Докторская диссертация. МГУ, 1966.
11. Каплан А. Е., Кравцов Ю. А., Рылов В. А. Параметрические генераторы и делители частоты. М., 1966.

Поступила в редакцию
25.2 1975 г.

Кафедра
физики колебаний