Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1976

УДК 539.1.01

Ю. Г. ПАВЛЕНКО, А. С. ВШИВЦЕВ, А. Х. МУССА

ИЗЛУЧЕНИЕ ЧАСТИЦЫ, ЗАХВАЧЕННОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ

Исследовано движение и излучение заряженной частицы в поле плоской электромагнитной волны. Характер движения зависит от начальных условий и величины параметра интенсивности волны.

В ряде работ [1—3] рассматривалась возможность захвата заряженной частицы электромагнитной волной в среде. В частности, в работах [2—3] показано, что в среде с показателем преломления $n>1$ при взаимодействии заряженной частицы с плоской электромагнитной волной, величина которой превышает некоторое критическое значение

$$\xi_{кр} = \frac{1 - n v_0/c}{(n^2-1)(1-v_0^2/c^2)}$$

$\left(\text{где } \xi = \left(\frac{-e^2 \overline{A^2}}{m^2 c^4}\right)^{1/2}\right.$ —параметр интенсивности волны$\Big)$, происходит отражение и захват частицы волной: «внешняя» по отношению к волне частица не может проникнуть в волну, а внутренняя — выйти из нее.

По отношению к внешней частице волна ведет себя как потенциальный барьер, отражаясь от которого, частица ускоряется, если волна догоняет ее, или замедляется, если она догоняет волну. Для внутренней частицы волна является потенциальной ямой, где частица, совершая колебания вокруг равновесной фазы, в среднем движется с волной, т. е. периодически она теряет и приобретает энергию внутри волны.

Причина этого явления [2] заключается в том, что в среде с $n>1$ скорость частицы может равняться фазовой скорости света, в результате чего она может получать или испускать черенковские фотоны.

Следует отметить, что амплитуда электромагнитной волны не должна превышать определенное значение, при котором происходит разрушение среды: $\xi^2 < \frac{\Delta}{mc^2}$ [4].

В указанных выше работах рассмотрение фактически проводилось для случая движения частицы у дна потенциальной ямы. В данной работе это ограничение снимается в результате применения метода Крылова — Боголюбова [5]. Найден закон движения и выражения для интенсивности излучаемой энергии как в режиме захвата, так и в случае его отсутствия.

Характер движения частицы существенным образом зависит от начальных условий и величины параметра интенсивности ξ. Показано, что захваченные частицы сепарируются по знаку заряда в точках, отстоящих по фазе на π.

Рассмотрим движение частицы в среде в поле плоской волны, описываемой потенциалом

$$A^{\mu}(\varphi) \quad (\varphi = kx = \omega t - \mathbf{kr}, \ \mathbf{k} = \omega/c\, n\mathbf{n}).$$

Умножая уравнения движения

$$\frac{d}{ds}\left(u^i + \frac{e}{mc^2} A^i\right) = \frac{e}{mc^2}\frac{\partial A^k}{\partial x^i} u_k \equiv \frac{e}{mc^2} k^i A' u \tag{1}$$

на k_i, получим

$$\dot{\varphi} = \frac{e}{mc^2} k^2 A' u; \quad \left(A' \equiv \frac{dA}{d\varphi};\ \dot{\varphi} = ku\right). \tag{2}$$

Из (1) и (2) после интегрирования найдем скорость

$$u^i(\varphi) = C^i - \frac{e}{mc^2} A^i + \frac{k^i}{k^2}\dot{\varphi}, \tag{3}$$

где C^i — постоянный вектор, удовлетворяющий условию $Ck=0$. Далее необходимо найти зависимость φ и $\dot{\varphi}$ от собственного времени. С этой целью, возводя (3) в квадрат, получим

$$\dot{\varphi}^2 = k^2\left[1 - \left(C - \frac{e}{mc^2} A\right)^2\right]. \tag{4}$$

Для циркулярно-поляризованной волны

$$A = a_1 \cos\varphi + a_2 \sin\varphi, \quad a_1 a_2 = 0, \quad a_1^2 = a_2^2 = a^2 \tag{5}$$

уравнение (4) может быть записано в виде

$$\frac{d\Delta\varphi}{ds} = \pm\left[\beta^2 - 4\varkappa_0^2 \sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}\right]^{1/2}; \tag{6}$$

$$\beta^2 = k^2\left(1 - C^2 - \frac{e^2a^2}{m^2c^4} + \frac{2eb}{mc^2}\right); \quad \varkappa_0^2 = \frac{ek^2b}{mc^2};$$

$$a_1C = b\cos\varphi_{eq}; \quad a_2C = b\sin\varphi_{eq}; \quad \Delta\varphi = \varphi - \varphi_{eq}. \tag{7}$$

Соответственно $\Delta\varphi$ как функция s выражается через эллиптические функции [6], использование которых затрудняет вычисления. Поэтому более удобно, исходя из уравнения второго порядка для $\Delta\varphi$ (следующего из (2) и (3))

$$\ddot{\varphi} = \frac{e}{mc^2} k^2\left(A'C - \frac{e}{mc^2} AA'\right), \tag{8}$$

найти решение с помощью приближенных методов. В дальнейшем ограничимся случаем (5). Используя (7), найдем, что (8) соответствует уравнению, описывающему движение математического маятника

$$\frac{d^2\Delta\varphi}{ds^2} + \varkappa_0^2 \sin\Delta\varphi = 0. \tag{9}$$

Из (6) следует, что захват частицы волной невозможен при условии $\beta^2 > 4\varkappa_0^2$ для отрицательно заряженных частиц ($e < 0$, $\varkappa_0^2 > 0$) и при $\beta^2 > 0$

для положительно заряженных ($e > 0$, $\varkappa_0^2 < 0$). В случае $\beta^2 \gg |4\varkappa_0^2|$ с точностью $\varkappa_0^2/\beta^2$ включительно найдем

$$\Delta\varphi = \left(\beta - \frac{\varkappa_0^2}{\beta}\right) s + \frac{\varkappa_0^2}{\beta^2} \sin \beta s + \text{const}. \tag{10}$$

Для частиц с зарядом $e > 0$ ($\varkappa_0^2 < 0$) захват возможен при условии $4\varkappa_0^2 < \beta^2 < 0$. Значение равновесной фазы в этом случае равно $\pi + \varphi_{\text{eq}}$.

Для частиц с зарядом $e < 0$ условием захвата является $0 < \beta^2 < 4\varkappa_0^2$. При $\beta^2 \ll 4\varkappa_0^2$ частица колеблется вблизи равновесной фазы φ_{eq} с частотой $\varkappa_0$ в области $|\Delta\varphi| < \dfrac{\beta}{\varkappa_0}$.

Следовательно, захваченные частицы сепарируются по знаку заряда в точках, отстоящих по фазе на π.

Найдем теперь $\Delta\varphi(s)$ в практически интересном случае больших отклонений $|\Delta\varphi| \leqslant \pi$ от равновесной фазы. Используя метод Крылова — Боголюбова [5], из (9) получим

$$\Delta\varphi = a \cos \psi, \quad \psi = \varkappa s + \alpha, \tag{11}$$

$$\varkappa = \varkappa_0 \sqrt{\frac{2I_1(a)}{a}},$$

где a и α должны быть найдены из начальных условий. В том же приближении

$$\sin \Delta\varphi = \frac{\varkappa^2}{\varkappa_0^2} \Delta\varphi, \quad \cos \Delta\varphi = 1 - \frac{1}{2} \frac{\varkappa^2}{\varkappa_0^2} (\Delta\varphi)^2, \tag{12}$$

$$\frac{d\,\Delta\varphi}{ds} = \pm [\beta^2 - \varkappa^2 (\Delta\varphi)^2]^{1/2}, \quad a = \frac{\beta}{\varkappa}.$$

Решение (11), как показано в [5], с погрешностью в 1% описывает движение с амплитудой $\leqslant \pi$, причем частота $\varkappa$ находится из решения уравнения

$$\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_0}\right)^2 = \frac{2\varkappa}{\beta} I_1 \left(\frac{\beta}{\varkappa}\right).$$

Учитывая (11) — (12), из (3) получим

$$u^i(s) = C^i - \frac{e}{mc^2} A^i_{\text{eq}} \left(1 - \frac{\beta^2}{4\varkappa_0^2}\right) - \frac{e}{mc^2} \frac{\beta\varkappa}{\varkappa_0^2} A'^i_{\text{eq}} \cos \psi +$$

$$+ \frac{e}{4mc^2} \frac{\beta^2}{\varkappa_0^2} A^i_{\text{eq}} \cos 2\psi - \frac{\beta k^i}{k^2} \sin \psi. \tag{13}$$

Перейдем теперь к нахождению спектра энергии излучения

$$dP_{k'} = \frac{n\omega'^2}{c} |e' j(k')|^2 d\omega'\, do', \tag{14}$$

$$j^\mu = \frac{e}{2\pi} \int ds u^\mu (s) e^{ik'x(s)}.$$

Здесь k'_μ, e'^*_μ 4-импульс фотона и его поляризация. Учитывая (13), найдем

$$Cu = p_0 - p_1 \cos(\psi - \gamma) + p_2 \cos 2\psi,$$

$$p_0 = e'C - \frac{e}{mc^2} e' A_{eq} \left(1 - \frac{\beta^2}{4\varkappa_0^2}\right), \quad p_2 = \frac{e}{4mc^2} \frac{\beta^2}{\varkappa_0^2} A_{eq} e',$$

$$p_1 \sin\gamma = \frac{\beta e' k}{k^2}; \quad p_1 \cos\gamma = \frac{e}{mc^2} \frac{\beta\varkappa}{\varkappa_0^2} e' A'_{eq},$$

$$k'x = \Delta_0 s - \Delta_1 \sin(\psi - \gamma_1) + \Delta_2 \sin 2\psi,$$

$$\Delta_0 = Ck' - \frac{e}{mc^2} k' A_{eq} \left(1 - \frac{\beta^2}{4\varkappa_0^2}\right), \quad \Delta_2 = \frac{e}{8mc^2} \frac{\beta^2}{\varkappa_0^2} k' A_{eq},$$

$$\Delta_1 \cos\gamma_1 = \frac{e}{mc^2} \frac{\beta}{\varkappa_0} k' A'_{eq}, \quad \Delta_1 \sin\gamma_1 = \beta \frac{k'k}{k^2}.$$

Представим

$$e^{-i\Delta_1 \sin(\psi-\gamma_1) + i\Delta_2 \sin 2\psi} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu e^{-i\nu\psi},$$

где

$$A_\nu = \sum_{l=0}^{\infty} I_{2l+\nu}(\Delta_1) I_l(\Delta_2) e^{i(2l+\nu)\gamma_1}.$$

Тогда (14) приобретает вид

$$dP = \frac{e^2 n\omega'^2}{2\pi \bar{u}_0 c} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| p_0 A_\nu - \frac{p_1}{2} (A_{\nu+1} e^{-i\gamma} + A_{\nu-1} e^{-i\gamma}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (A_{\nu+2} + A_{\nu-2}) \right|^2 \delta(\Delta_0 - \nu\varkappa)\, d\omega'\, do', \tag{15}$$

где $\bar{u}_0$ — постоянная составляющая их скорости (13).

Рассмотрим частный случай захвата частицы волной, предполагая, что начальная скорость заряда параллельна направлению распространения волны. Тогда

$$b = \frac{mc^2}{e} \xi^2, \quad \varkappa_0^2 = |k^2| \xi^2, \quad \varphi_{eq} = \varphi_0$$

и условие захвата принимает вид $\xi^2 \gg \frac{\dot{\varphi}_0^2}{k^2}$. Из (15) следует, что

$$\bar{u}_0 = u_0(0) - \frac{\omega}{ck^2} \dot{\varphi}_0.$$

Излучаемая частота

$$\omega' = \frac{\nu\varkappa c}{u_0(0)\Delta}, \quad \Delta = 1 - n(\omega') \frac{v_z}{c}.$$

Для колебаний с небольшой амплитудой

$$a \ll 1, \quad \varkappa_0 = \frac{\omega}{c} \xi \sqrt{n^2 - 1}.$$

Рассмотрим теперь излучение в том случае, когда условия захвата не реализуются $(\beta^2 \gg |4\varkappa_0^2|)$.

Закон движения имеет вид

$$x^i = \left(C^i + \frac{k^i}{k^2}\beta\right)s - \frac{e}{mc^2\beta}\left[a_1^i \sin(\varphi_{eq} + \beta s) - a_2^i \cos(\varphi_{eq} + \beta s)\right]. \quad (16)$$

Интенсивность излучения оказывается равной

$$dP = \frac{e^2 n(\omega')\,\omega'^2}{2\pi \bar{u}_0 c} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \left| p_0 - p_1 \cos(\gamma_1 - \gamma)\frac{\nu}{\Delta_1}\right|^2 I_\nu^2(\Delta_1) + \right.$$

$$\left. + p_1^2 \sin^2(\gamma_1 - \gamma)\, I_\nu'^2(\Delta_1)\right\} d\omega'\, do'\, \delta(\Delta_0 - \nu\beta),$$

$$p_0 = Ce' + \frac{ke'}{k^2}\beta, \quad p_1 \cos\gamma = \frac{e}{mc^2} a_1 e', \quad p_1 \sin\gamma = \frac{e}{mc^2} a_2 e', \quad (17)$$

$$\Delta_0 = Ck' + \frac{kk'}{k^2}\beta, \quad \frac{e}{mc^2} a_1 k' = \Delta_1 \cos\gamma_1, \quad \frac{e}{mc^2} a_2 k' = \Delta_1 \sin\gamma_1. \quad (18)$$

В заключение укажем на то, что эффект захвата частиц волной можно использовать для транспортировки частиц через вещества [2]. Другое возможное применение эффекта — сепарирование частиц как по скоростям, так и по знаку заряда.

Мы выражаем благодарность участникам семинара проф. А. А. Соколова за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дементьев А. С. Кандидатская диссертация. МГУ, 1974.
2. Арутюнян В. М., Аветисян Г. К. «Квантовая электроника», 7, 1042, 1972.
3. Арутюнян В. М., Аветисян Г. К. ЖЭТФ, 62, 1639, 1972.
4. Бункин Ф. В, Казаков А. Б. ЖЭТФ, 59, 2233, 1970.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1969.
6. Мусаханян В. В., Никишов А. И. ЖЭТФ, 66, 1258, 1974.

Поступила в редакцию
3.4 1975 г.

Кафедра
теоретической физики