

Ю. И. ВОРОНЦОВ, Ф. Я. ХАЛИЛИ

## О ПРЕДЕЛЬНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДЕТЕКТОРОВ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Рассмотрена предельная чувствительность детекторов гравитационных волн с емкостным преобразователем. Получены выражения для отклика детектора при воздействии импульса синусоидального сигнала и флуктуаций. Рассмотрены условия обнаружения регулярного сигнала на фоне флуктуаций и предложен новый алгоритм выделения сигнала из шума.

В связи с попытками обнаружения гравитационного космического излучения в последние годы в литературе обсуждается вопрос о чувствительности различных детекторов гравитационных волн. В результате теоретического анализа емкостных преобразователей получены соотношения, определяющие минимальную силу, обнаружимую по отклику механического осциллятора [1, 2, 3]. Однако в указанных работах приближенный метод расчета не позволил выявить некоторых условий применимости полученных соотношений, которые, как показали дальнейшие исследования, могут быть очень существенными. Использованный в данной работе более строгий метод решения позволил уточнить границы применимости известных формул минимально обнаружимой силы и определить условия реализации максимальной чувствительности. Предложен новый алгоритм выделения сигнала из шума.

Движение исследуемого емкостного преобразователя описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2x &= q^2/2mCd + \frac{1}{m}(F_{\text{фл}} + F), \\ \ddot{q} + 2\Delta\dot{q} + \Omega^2q &= qx\Omega^2/d + \frac{P}{L}\sin pt + \frac{1}{L}U_{\text{фл}}, \end{aligned} \quad (1)$$

$x$  — координата пластины конденсатора, связанной с массой  $m$  механического осциллятора,  $q$  — заряд на пластинах конденсатора,  $\omega$ ,  $\delta$  — параметры механической части преобразователя,  $\Omega$ ,  $\Delta$ ,  $L$ ,  $C$  — параметры электрической части. Величина  $d$  есть начальное расстояние между обкладками конденсатора,  $C$  — начальная емкость,  $F_{\text{фл}}$  и  $U_{\text{фл}}$  — флуктуационные воздействия,  $F(t)$  — внешняя сила, действие которой необходимо обнаружить,  $P$  и  $p$  — амплитуда э. д. с. и частота генератора накачки. Так же, как и в [2, 3], причем  $p = \Omega - \omega$ ,  $\Omega \gg \omega$ . Тогда, подставив в (1)  $q = q_p + q$ , где (при  $\omega \gg \Delta$ )

$$q_p \approx \frac{PC}{2} \frac{\Omega}{\omega} \sin pt, \quad (2)$$

получим

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = \frac{P\Omega q_1}{2m\omega d} \sin pt + \frac{1}{m} (F_{\phi n} + F),$$

$$\ddot{q}_1 + 2\Delta\dot{q}_1 + \Omega^2 q_1 = \frac{P\Omega x}{2L\omega d} \sin pt + \frac{1}{L} U_{\phi n}. \quad (3)$$

В (3) отброшены в правой части все силы, частоты которых далеки от собственных частот системы. Кроме того, считалось, что амплитуда вызванного накачкой заряда  $q_p \gg q_1$ .

Отклик на регулярное воздействие. Поскольку уравнения (3) линейны, то в принципе можно получить решение для силы любого вида. Однако из-за громоздкости общих решений целесообразно рассмотреть некоторые частные случаи, анализ которых поможет выявить общие закономерности.

Рассмотрим воздействие силы  $F = F_0$  в течение времени  $\tau_0 \ll \frac{1}{\omega}$  и воздействие силы  $F(t) = F_0 \cos(\omega + \xi)t$  в течение времени  $\tau_1 \gg \frac{1}{\omega}$ .

Отклик на воздействие существенно зависит от коэффициента связи между электрической и механической частями преобразователя. Для упрощения выкладок будем рассматривать отдельно случаи слабой и сильной связей.

Под действием силы  $F = F_0$  возникают колебания заряда

$$q_F(t) = (C\Omega/m\omega)^{1/2} \exp(-t/\tau^*) F_0 \tau_0 \sin Dt \Omega t \quad (4)$$

при сильной связи, т. е. при  $D \gg 1/\tau^*$ , где

$$D^2 = \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 CP^2/64md^2; \quad \tau^* = 2/(\Delta + \delta); \quad (5)$$

$$t \gg \omega^{-1};$$

а в случае слабой связи:

$$q_F(t) = F_0 \tau_0 D (C\Omega/m\omega)^{1/2} \exp(-t/\tau^*) \times$$

$$\times \frac{\text{sh} \left( \frac{1}{4} (\Delta - \delta)^2 - D^2 \right)^{1/2} t}{\left( \frac{1}{4} (\Delta - \delta)^2 - D^2 \right)^{1/2}} \sin \Omega t. \quad (6)$$

Колебания заряда под действием силы  $F(t) = F_0 \cos(\omega + \xi)t$  при произвольной расстройке  $\xi$  описываются громоздкими выражениями, поэтому мы приведем только решения в случаях  $\xi = \pm D$  и  $\xi = 0$ .

При сильной связи и  $\xi = \pm D$  амплитуда колебаний будет больше, чем при любых других значениях  $\xi$ , и при  $\omega^{-1} \ll t \ll \tau_0$ , заряд будет равен

$$q_F(t) \approx -\frac{1}{4} F_0 (C\Omega/m\omega)^{1/2} \left[ (1 - \exp(-t/\tau^*)) \tau^* \cos(\Omega \pm \right.$$

$$\left. \pm D)t + \frac{1}{2D} \exp(-t/\tau^*) \sin Dt \cos \Omega t \right]. \quad (7)$$

Когда же  $\xi = 0$ ,

$$q_F(t) = (F_0/2D) (C\Omega/m\omega)^{1/2} (1 - \cos Dt \exp(-t/\tau^*)) \sin \Omega t. \quad (7a)$$

В случае слабой связи отклик максимален при  $\xi = 0$  и равен (при  $D \ll \Delta - \delta$ )

$$q_F(t) = (F_0 D / 2\Delta\delta) (C\Omega/m\omega)^{1/2} [1 - (\Delta e^{-\delta t} - \delta e^{-\Delta t}) / (\Delta - \delta)] \sin \Omega t. \quad (8)$$

Графики огибающих функций (4), (7) и (7a) показаны на рис. 1 (кривые 1, 2, 3 соответственно).

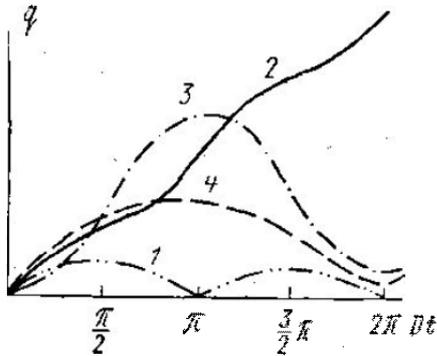


Рис. 1

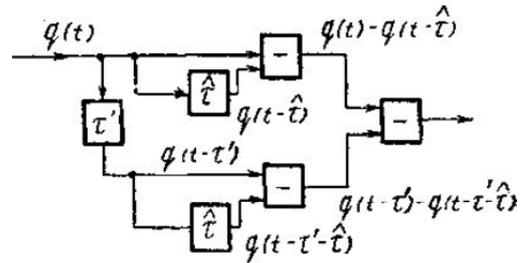


Рис. 2

Отклик на флуктуационное воздействие. Из (3) нетрудно найти спектральную плотность флуктуаций амплитуды заряда:

$$S(\nu) \approx \frac{\kappa T_e C \Delta}{\pi} \frac{\alpha D^2 + \delta^2 + \eta^2}{(\eta^2 - D^2)^2 + \eta^2 (\Delta^2 + \delta^2) + \delta \Delta (2D^2 + \delta \Delta)}. \quad (9)$$

Здесь  $\eta = \nu - \Omega$ ,  $\eta \ll \Omega$ ,  $\alpha = T_m Q_e / T_e Q_m$ ;  $T_e$ ,  $Q_e$ ,  $T_m$ ,  $Q_m$  — температуры и добротности электрической и механической частей системы,  $\kappa$  — постоянная Больцмана. Спектральные плотности  $U_{фл}$  и  $F_{фл}$  равны  $4\kappa T_e (2L\Delta)$  и  $4\kappa T_m (2m\delta)$  соответственно.

Используя (9), найдем функцию корреляции амплитуды заряда

$$B(\tau) = (\kappa T_e C \Delta / (\Delta + \delta) D_1) \left[ \left( \frac{\delta^2 + \alpha D^2}{\lambda_2} - \lambda_2 \right) e^{-\lambda_2 \tau} - \left( \frac{\delta^2 + \alpha D^2}{\lambda_1} - \lambda_1 \right) e^{-\lambda_1 \tau} \right],$$

где

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} (\Delta + \delta) \pm D_1, \quad D_1 = \left( \frac{1}{4} (\Delta - \delta)^2 - D^2 \right)^{1/2}. \quad (10)$$

При сильной связи:

$$B(\tau) \approx [2\kappa T_e C \Delta (\alpha + 1) / (\Delta + \delta)] \cos D\tau e^{-\tau/\tau^*}.$$

Колебания функции (10) при сильной связи с частотой  $D$  являются результатом биений колебаний в рассматриваемой системе из двух осцилляторов.

Условия обнаружения регулярного воздействия на фоне флуктуаций. Величина минимальной обнаружимой силы будет существенно зависеть от способа выделения сигнала из шума. В случае, когда  $S(\nu)$  близка по форме к спектральной плотности флуктуаций в колебательной системе с одной степенью свободы, близким к оптимальному критерию обнаружения внешнего воздействия является условие

$$|q_F(\hat{\tau}) - q_F(0)| > \theta \{ [q_s(\hat{\tau}) - q_s(0)]^2 \}^{1/2} = \theta \{ 2 [B(0) - B(\hat{\tau})] \}^{1/2}, \quad (11)$$

где  $q_s$  — заряд, вызванный флуктуационным воздействием,  $\theta$  — коэффициент, зависящий от уровня достоверности обнаружения,  $\hat{\tau}$  — время измерения. Этот критерий следует использовать при слабой связи. Но поскольку при слабой связи чувствительность преобразователя оказывается много меньше, чем при сильной, мы на этом случае останавливаться не будем. Анализ результатов применения критерия (11) в случае сильной связи показывает, что ожидаемый при  $\tau^* \gg \hat{\tau}$  выигрыш в чувствительности в  $\sqrt{\hat{\tau}/\tau^*}$  раз (по сравнению с тем, что имеет место при  $\tau^* < \hat{\tau}$  [2]) возможен только в случае действия силы вида  $F(t) = F_0 \cos(\omega + \xi)t$  при  $\xi = \pm D$  и  $D\hat{\tau} = 2\pi$ . Этот результат очевиден из анализа рис. 1. Кривая 4, соответствующая  $\sigma(\tau) = [B(0) - B(\tau)]^{1/2}$ , имеет минимум там же, где отклики на воздействие силы  $F_0$  и силы  $F = F_0 \cos(\omega + \xi)t$  при  $\xi = 0$ .

Оптимальный алгоритм выделения должен учитывать присущие системе с сильной связью биения. Таким свойством обладает алгоритм:

$$|q_F(\hat{\tau}) - q_F(0)| \geq \{ [(q_s(\hat{\tau}) - q_s(0)) - (q_s(\hat{\tau} - \tau') - q_s(-\tau'))]^2 \}^{1/2} \approx \approx \theta \{ 4B(0) [\tau'/\tau^* (1 - \cos D\hat{\tau}) - \hat{\tau}/\tau^* \cos D\hat{\tau}] \}^{1/2}. \quad (12)$$

Здесь  $\tau' = 2\pi/D$  — период биений,  $0 < \hat{\tau} \leq \tau'$ . Приближенное соотношение в (12) получено при  $\tau' \ll \tau^*$ . Соответствующая функциональная схема приведена на рис. 2. Левая часть (12) имеет такой вид только в том случае, когда длительность интервала усреднения  $\hat{\tau} \leq \tau'$ , а начало интервала усреднения совмещено с началом действия силы. Используя (4), (7) и (7а), можно найти величину минимальной обнаружимой силы. При  $F(t) = F_0 \cos(\omega + \xi)t$ , можно обнаружить действие такой силы, у которой

$$F_0 > \frac{8\theta}{\hat{\tau}} \sqrt{\frac{2\kappa T^* m \omega}{\Omega}} \sqrt{\frac{\hat{\tau}}{\tau_e^*}} \quad (\text{при } -D < \xi < D). \quad (13)$$

Здесь  $\tau_e^* = \frac{1}{\Delta}$ ,  $T^* = T_e(\alpha + 1)$ . При расстройках  $\xi$ , больших  $D$ , чувствительность уменьшается пропорционально  $\xi^{-2}$ .

Чувствительность к действию силы  $F_0$  длительностью  $\tau_0 \ll 1/\omega$  максимальна при  $D\hat{\tau} \approx \pi/2$  и равна

$$F_0 > \frac{4\theta}{\tau_0} \sqrt{\frac{2\kappa T^* m \omega}{\Omega}} \sqrt{\frac{\hat{\tau}}{\tau_e^*}}. \quad (14)$$

Авторы выражают благодарность проф. В. Б. Брагинскому.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Брагинский В. Б. Физические эксперименты с пробными телами. М., 1970.
2. Брагинский В. Б., Воронцов Ю. И. «Успехи физических наук», 114, 41—53, 1974.
3. Панов В. И., Петников В. Г. «Вести. Моск. ун-та», физ., астроном., 16, № 2, 212, 1975.

Поступила в редакцию  
8.4 1975 г.

Кафедра  
физики колебаний