Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1976

УДК 530.145

В. А. ГОЛЫШКОВ, Н. Ф. НЕЛИПА

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ ЛИ ГРУППЫ SU(3) (невырожденная серия)

Получены нелинейные представления алгебры Ли группы SU(3) (невырожденная серия), построены инварианты найденного представления и показано, что максимальная размерность неприводимого представления равна восьми.

В последнее время значительно возрос интерес к нелинейной теории поля, что, в свою очередь, стимулировало развитие нелинейных представлений групп. Впервые одна из возможных реализаций нелинейных представлений алгебры Ли группы SU(2) была найдена Швингером [1]. В работах [2] изложен общий подход к построению некоторого класса нелинейных представлений групп.

Опираясь на основополагающие работы С. Ли и Энгеля, а также Картана [3], Стоянов и Христов развили метод нахождения более общих нелинейных представлений [4, 5] и построили нелинейные представления группы SU(2).

Как выясняется, нелинейные представления групп обладают рядом специфических особенностей, которые существенны при построении нелинейных лагранжианов (например, [6]). Поэтому очень важно иметь сведения о нелинейных представлениях групп, подобно тому, как важно знание свойств линейных представлений групп при построении линейных лагранжианов. Тем самым знание нелинейных представлений групп представляет большой интерес для физических приложений.

В настоящей работе, следуя методу Стоянова и Христова, получена невырожденная серия нелинейных представлений алгебры Ли группы SU(3), а также исследуется вопрос о приводимости найденного представления.

Приведем некоторые из основных определений теории нелинейных представлений.

Нелинейным представлением группы Ли (алгебры Ли) называется взаимно-однозначное и гладкое отображение n-мерного многообразия $\mathfrak{M}^n$ на себя. Оператор представления группы

$$F_i(g_\mu, x_k) \left(\text{соответственно } M_i^\mu(x) \equiv \left(\frac{\partial F_i(g, x)}{\partial g_\mu}\right)_{g=0} \text{ для алгебры Ли}\right),$$

таким образом, является векторной функцией точки многообразия и параметров группы.

Операция коммутирования определяется так же, как и для векторных полей, формулой

$$[M^\mu(x),\ M^\nu(x)]_i = \frac{\partial M_i^\mu}{\partial x_k} M_k^\nu - \frac{\partial M_i^\nu}{\partial x_k} M_k^\mu \text{ (сумма по } k). \qquad (1)$$

Коммутатор двух генераторов представления нельзя записать в виде произведения операторов (как в линейных представлениях); поэтому, нахождение представлений сводится к решению систем дифференциальных (а не алгебраических) уравнений.

Инвариантом представления называется скалярная функция $I(x)$ на $\mathfrak{M}^n$, которая не меняется при переходе к преобразованной точке:

$$I[F(g,\ x)] = I(x)$$

или для алгебры Ли:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial I(x)}{\partial x_k} M_k^\mu(x) = 0. \qquad (2)$$

Представление неприводимо, если оно не имеет нетривиальных инвариантов.

Два представления называются эквивалентными, если они действуют на областях пространства $\mathfrak{M}^n$, связанных между собой невырожденным преобразованием координат

$$y_i = y_i(x), \quad \det\left\{\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right\} \neq 0.$$

Для алгебр Ли:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} M_k^\mu(x) = N_i^\mu(y).$$

Обладая бо́льшей общностью по сравнению с линейными, нелинейные представления имеют менее разнообразные свойства. Так, размерность n неприводимого нелинейного представления удовлетворяет неравенству: ранг группы $\leqslant n \leqslant$ число параметров группы.

В работе [5] классифицированы все возможные (в том числе приводимые) нелинейные представления группы $SU(2)$, которых оказалось больше, чем линейных.

Переход к линейным представлениям осуществляется по формулам:

$$\begin{aligned} &M_i^\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} T_{ik}^\mu x_k \text{ (в координатной реализации)}, \\ &M_i^\mu(x) \to \sum_{k=1}^{n} M_k^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \text{ (в функциональной реализации)}. \end{aligned} \qquad (3)$$

При этом если нелинейное представление неприводимо, то линейное, получаемое по (3), может оказаться приводимым.

Алгебра Ли группы $SU(3)$ имеет вид

$$\left[\frac{\lambda_i}{2},\ \frac{\lambda_j}{2}\right] = i \sum_{k=1}^{\infty} f_{ijk} \frac{\lambda_k}{2}, \qquad (4)$$

где f_{ijk} — структурные константы, λ_i — матрицы Гелл-Манна.

Рассмотрим комплексное расширение этой алгебры Ли:

$$T^{\pm} \equiv \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2), \quad T^3 \equiv \frac{1}{2}\lambda_3,$$

$$U^{\pm} \equiv \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7); \quad Y \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8, \quad V^{\pm} \equiv \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm i\lambda_5).$$

Тогда коммутационные соотношения (4) приобретут вид

$$\begin{aligned}
&[T^3, T^{\pm}] = \pm T^{\pm}, && [Y, T^{\pm}] = 0,\\
&[T^3, U^{\pm}] = \mp\frac{1}{2}U^{\pm}, && [Y, U^{\pm}] = \pm U^{\pm},\\
&[T^3, V^{\pm}] = \pm\frac{1}{2}V^{\pm}, && [Y, V^{\pm}] = \pm V^{\pm},\\
&[T^+, T^-] = 2T^3, && [Y, T^3] = 0,\\
&[T^+, V^+] = [T^+, U^-] = [U^+, V^+] = 0, && [U^+, U^-] = \frac{3}{2}Y - T^3,\\
&[T^-, V^-] = [T^-, U^+] = [V^-, U^+] = 0, && [V^+, V^-] = \frac{3}{2}Y + T^3,\\
&[T^+, U^+] = V^+, && [U^-, T^-] = V^-,\\
&[T^+, V^-] = -U^-, && [V^+, T^-] = -U^+,\\
&[U^+, V^-] = T^-, && [V^+, U^-] = T^+.
\end{aligned} \qquad (5)$$

В терминах дифференциальной геометрии выписанные уравнения (5) представляют собой систему квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка. Для нахождения генераторных функций нелинейного представления необходимо решить систему (5), т. е. найти ее частное решение и эквивалентные ему.

Для получения максимальной размерности компоненты генераторов надо построить функционально независимыми [7].

Идея нахождения решения, сформулированная в [5], сводится к последовательному выбору систем координат определенного вида. Сначала выбираем такую систему координат, в которой один из генераторов имеет диагональный вид. Подставляя этот генератор в уравнения (5), получаем систему с меньшим числом уравнений, определяющую оставшиеся генераторные функции. Решаем полученную систему. Далее выбираем вид еще одного генератора и повторяем указанную процедуру. Преобразование координат, приводящее к выбранному виду второго генератора, должно сохранять форму первого генератора и, кроме того, быть невырожденным. Его существование определяется существованием решения дифференциального уравнения в частных производных.

На основе теоремы 3, доказанной в [4], выбираем систему координат таким образом, чтобы генератор $T^3(x)$ имел диагональный вид:

$$T_i^3(x) = \frac{1}{2}x_i.$$

Задание конкретной формы генератора $T^3(x)$ приводит к конкретизации вида остальных генераторов. Рассмотрев коммутаторы, содержащие $T^3(x)$, получим семь уравнений для генераторов $T^{\pm}$, $U^{\pm}$, $V^{\pm}$, Y:

$$T^{\pm}-\frac{\partial T^{\pm}}{\partial x_k}T_k^{\pm}=2T^{\pm},\quad V^{\pm}-\frac{\partial V^{\pm}}{\partial x_k}x_k=\pm V^{\pm},$$

$$U^{\pm}-\frac{\partial U^{\pm}}{\partial x_k}x_k=\mp U^{\pm},\quad \frac{\partial Y}{\partial x_k}x_k=Y$$

(по повторяющимся индексам суммирование).

Решая выписанные уравнения, находим

$$U_i^{+}(x)=x_n^2\widetilde{U}_i^{+}(z_p),\qquad V_i^{+}(x)=\widetilde{V}_i^{+}(z_p),$$

$$U_i^{-}(x)=\widetilde{U}_i^{-}(z_p),\qquad V_i^{-}(x)=x_n^2\widetilde{V}_i^{-}(z_p),$$

$$T_i^{+}(x)=\frac{1}{x_n}\widetilde{T}_i^{+}(z_p),\qquad Y_i(x)=x_n\widetilde{Y}_i(z_p),$$

$$T_i^{-}(x)=x_n^3\widetilde{T}_i^{-}(z_p),$$

где $\widetilde{U}^{\pm}(z_p)$, $\widetilde{V}^{\pm}(z_p)$, $\widetilde{T}^{\pm}(z_p)$, $\widetilde{V}(z_p)$ — произвольные функции аргумента

$$z_p=\frac{x_p}{x_n}\quad (p=1,2,\ldots(n-1)).$$

На следующем этапе вычислений предполагаем, что среди бесконечного множества систем координат, в которых диагонализуется генератор $T^3(x)$, существуют такие, в которых другая генераторная функция $V_i^{+}(x)=1$. Переход в такую систему координат осуществляется с помощью невырожденного преобразования

$$y_i=y_i(x_k),\quad \det\left\{\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right\}\neq 0,$$

сохраняющего вид генератора $T_i^3(y)=\frac{1}{2}y_i$. Поэтому новые координаты должны удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\,\frac{1}{2}x_k=\frac{1}{2}y_i,\qquad \frac{\partial y_i}{\partial x_k}V_k^{+}(x)=1\ \text{(сумма по } k).$$

Подставляя решение первого уравнения $y_i=x_n\cdot\widetilde{y}_i(z_p)$ во второе, получаем

$$\widetilde{y}_i V_n^{+}+\frac{\partial y_i}{\partial z_p}(V_p^{+}-z_pV_n^{+})=1\ \text{(сумма по } p).$$

Если $V_p^{+}-z_pV_n^{+}\neq 0$ хотя бы для одного p, то существует решение этого уравнения. Если же $V_p^{+}-z_pV_n^{+}=0$ для всех p, то

$$\widetilde{y}_i=\frac{1}{V_n^{+}}\quad \text{для всех } i=1,2,\ldots n.$$

Интересуясь представлениями максимальной размерности, мы не будем рассматривать возможность подобного вырождения.

Решениями шести соответствующих уравнений из (5), содержащих генератор $V_i^{+}(x)=1$, являются

$$T_i^{+}=\frac{1}{x_{n-1}-x_n}\widetilde{\widetilde{T}}{}_i^{+}(v_\alpha),\qquad T_i^{-}=x_nU_i^{+}+(x_{n-1}-x_n)^3\widetilde{\widetilde{T}}{}_i^{-}(v_\alpha),$$

$$U_i^+ = (x_{n-1} - x_n)^2 \tilde{\tilde{U}}_i^+ (v_\alpha), \qquad U_i^- = U_i (v_\alpha) - x_n T_i^+,$$

$$Y_i = x_n + (x_{n-1} - x_n) \tilde{\tilde{Y}}_i (v_\alpha),$$

$$V_i^- = -\frac{3}{2} x_n Y_i + (x_{n-1} - x_n)^2 \tilde{\tilde{V}}_i^- (v_\alpha) + \frac{x_n}{2} (2x_n - x_i),$$

где $\tilde{\tilde{\tilde{T}}}^\pm$, $\tilde{\tilde{U}}^\pm$, $\tilde{\tilde{Y}}$, $\tilde{\tilde{V}}^-$ — произвольные функции аргумента

$$v_\alpha \equiv \frac{z_\alpha - 1}{z_{n-1} - 1} = \frac{x_\alpha - x_n}{x_{n-1} - x_n}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, (n-2).$$

Здесь новые координаты $\{y_i\}$ вновь обозначены через $\{x_i\}$.

На третьем этапе вычислений переходим в такую систему координат, в которой

$$\tilde{\tilde{\tilde{T}}}_i^+ = \frac{1}{v_i + 1}.$$

Решение коммутационных соотношений, содержащих генератор T_i^+, приводит к дальнейшей конкретизации пяти оставшихся генераторов.

Продолжая этот процесс аналогичным образом, найдем следующее представление алгебры Ли группы $SU(3)$:

1. $T_i^3 = \frac{1}{2} x_i;$

2. $V_i^+ = 1;$

3. $T_i^+ = \frac{1}{(x_{n-1} - x_n)(v_i + 1)};$

4. $U_i^+ = (x_{n-1} - x_n)^2 \left[1 + \frac{(v_i - 1)^3}{v_i + 1}\right];$

5. $Y_i = x_n - (x_{n-1} - x_n) \left\{2 - \frac{v_i (v_i - 1)}{v_i + 1} [1 + q_i (y_i - 1)]\right\};$ (6)

6. $T_i^- = x_n U_i^+ + (x_{n-1} - x_n)^3 \left[v_i + \frac{1}{v_i + 1} + 2 \frac{(v_i - 1)^3}{v_i + 1} + \right.$
$\left. + \frac{(v_i - 1)^5}{v_i (v_i + 1)} \frac{1}{y_i - 1} q_i^2 (q_i - 1) t_i\right];$

7. $V_i^- = -\frac{3}{2} x_n Y_i + \frac{x_n}{2}(2x_n - x_i) + (x_{n-1} - x_n)^2 \left\{-2 - v_i - \frac{2}{v_i + 1} - \right.$
$- U_i^- + 3 \frac{v_i (v_i - 1)}{v_i + 1} [1 - q_i (y_i - 1)] +$
$\left. + \frac{(v_i - 1)^3}{v_i + 1} q_i^2 \left[\frac{y_i}{y_i - 1} (q_i - 1) + w_i^2 (t_i - 1)^2\right]\right\};$

8. $U_i^- = -\frac{2}{v_i + 1} + \frac{v_i^2}{v_i^2 - 1} \left\{-1 - \frac{3}{2} q_i (y_i - 1) + \right.$
$\left. + (y_i - 1)^2 \left[1 - \frac{3}{2} q_i^2 + (t_i - 1)^2 (1 + w_i^2)\right]\right\} - x_n T_i^+,$

где

$$v_\alpha \equiv \frac{x_\alpha - x_n}{x_{n-1} - x_n}, \quad y_\xi \equiv \frac{(v_\xi - 1)^2}{v_\xi} \cdot \frac{v_{n-2}}{(v_{n-2} - 1)^2}, \quad q_\omega \equiv \frac{y_\omega - 1}{y_\omega} \cdot \frac{y_{n-3}}{y_{n-3} - 1},$$

$$v_{n-1} = 1, \qquad y_{n-2} = 1, \qquad q_{n-3} = 1,$$

$$v_n = 0, \qquad y_{n-1} = y_n = 0, \qquad q_{n-2} = q_{n-1} = q_n = 0, \tag{7}$$

$$t_\nu \equiv \frac{q_\nu - 1}{q_\nu} \cdot \frac{q_{n-4}}{q_{n-4} - 1}, \quad u_\lambda \equiv \frac{t_\lambda - 1}{t_\lambda} \cdot \frac{t_{n-5}}{t_{n-5} - 1},$$

$$t_{n-4} = 1, \qquad u_{n-5} = 1,$$

$$t_{n-3} = \ldots = t_n = 0, \qquad u_{n-4} = \ldots = u_n = 0,$$

$$w_\varkappa \equiv \frac{u_\varkappa - 1}{u_\varkappa} \cdot \frac{u_{n-6}}{u_{n-6} - 1},$$

$$w_{n-6} = 1,$$

$$w_{n-5} = \ldots = w_n = 0.$$

В отличие от работы [5], где найдены нелинейные представления алгебры Ли группы $SU(2)$, имеющей ранг, равный 1, здесь построено представление алгебры Ли ранга 2. В такой алгебре Ли подалгебра Картана состоит из двух генераторов, коммутирующих между собой. Это обстоятельство ведет к существенному усложнению вида генераторов представления.

Итак, установлено, что генераторы любого невырожденного представления могут быть приведены к виду (6). Для решения вопроса о приводимости следует рассмотреть инварианты построенного представления. Инварианты $I(x)$ представления алгебры Ли определяются из уравнений (2)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial I(x)}{\partial x_k} M_k^\mu(x) = 0,$$

где

$$M_k^\mu(x) = \{T_k^\pm, T_k^3, V_k^\pm, U_k^\pm, Y\}. \tag{8}$$

Решаем уравнения (2), последовательно подставляя генераторы (8). Тогда на каждом этапе уравнения удовлетворяются произвольной функцией аргументов $z_v \to v_\alpha \to y_\xi \to q_\omega \to t_\nu \to u_\lambda \to w_\varkappa$ определенных формулами (7). В итоге получаем, что система (2) допускает $(n-8)$ первых интегралов

$$p_\sigma = \frac{w_\sigma - 1}{w_\sigma} \cdot \frac{w_{n-7}}{w_{n-7} - 1}, \quad \sigma = 1, 2, \ldots, (n-8)$$

и ее решением является произвольная функция аргумента p_σ, в частности $I(p) = p_\sigma$.

Отсюда следует, что любое невырожденное нелинейное представление алгебры Ли группы $SU(3)$ имеет $(n-8)$ инвариантов; поэтому оно приводимо и распадается на $(n-8)$ одномерных и одно восьмимерное неприводимое представление. Таким образом, в восьмимерном пространстве $(n-8)$ построенное представление неприводимо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwinger J. «Phys Lett.», **24 B**, 473, 1967.
2. Coleman S., Wess J., Zumino B. «Phys. Rev.», **177**, 2239, 1969; Hind J. D. «Nuov. Cim.», **4A**, 71, 1971.
3. Lie S., Engel F. Theorie der Transformationgruppen 1, 2, 3. Leipzig, 1893; Cartan E. Sur la structur des groupes de transformations finis et continus. Paris, 1894.
4. Стоянов Д. В., Христов Хр. Нелинейные представления группы Ли. ОИЯИ, Р2—3725, 1968.
5. Стоянов Д. В., Христов Хр. Нелинейные представления группы Ли. ОИЯИ, Р2—3648, 1967.
6. Schwinger J. «Ann. Phys.» (N. Y.), **2**, 407, 1957; Chang P., Gursey F. «Phys. Rev.», **164**, 1752, 1967; Coleman S., Wess J., Zumino B. «Phys. Rev.», 177, 2239, 1969; Weinberg S. «Phys. Rev. Lett.», **18**, 188, 1967.
7. Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований. М., 1947.

Поступила в редакцию
17.2 1975 г.

НИИЯФ