Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1976

УДК. 537.312.62

О. О. СУШКОВА

К ВОПРОСУ О КРИТИЧЕСКИХ РАЗМЕРАХ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ ОБРАЗЦОВ

В рамках теории Гинзбурга—Ландау на основе вычисления фазового множителя, входящего в корреляционную функцию $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, оценены критические размеры сверхпроводящих образцов (пленка конечной толщины, нить с квадратным сечением, кубик) по отношению к флуктуациям фазы параметра порядка.

Райсом [1] показано, что двухчастичная корреляционная функция $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathrm{const} < \psi(\mathbf{r}_1)\psi(\mathbf{r}_2) >$ для одномерных и двумерных систем за счет квантовых флуктуаций стремится к нулю при $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \to \infty$. Это указывает на отсутствие корреляций между парами электронов, т. е. на отсутствие сверхпроводимости в одно- и двумерном случае. Для систем с тремя измерениями G стремится к конечной константе, и дальний порядок существует.

Однако вывод Райса, как известно, относится к гипотетическим одно- и двумерным системам: бесконечно тонкая нить и бесконечно тонкая пленка. Представляет интерес исследовать поведение функции G для реальных систем. Это дает возможность оценить критические размеры образцов, которые могут находиться в сверхпроводящем состоянии. Если размер образца меньше критического, сверхпроводимость в нем разрушается флуктуациями.

Расчет проводится в рамках подхода Райса в предположении, что вдоль того измерения, которое мы считаем конечным, импульс электрона квантуется.

Запишем, следуя Райсу, свободную энергию системы в виде

$$F[\psi(\mathbf{r})] = a\int d\mathbf{r}\,|\psi(r)|^2 + \frac{b_1}{2}\int d\mathbf{r}\,|\psi(\mathbf{r})|^4 + c\int d\mathbf{r}\,|\nabla\psi(r)|^2 \qquad (1)$$

Критическая температура T_c определяется условием $a(T_c) = 0$, а для $T < T_c$ $a(T) < 0$. Минимальное значение $F[\psi(\mathbf{r})]$, F_0 для $T < T_c$ дается выбором $\psi(\mathbf{r}) - \psi_0 e^{i\varphi_0}$, где $\psi_0^2 - \frac{a}{b}$, а φ_0 — произвольная константа.

Для двухчастичной корреляционной функции получим выражение

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathrm{const}\int D\psi(\mathbf{r}_1)\,\psi(\mathbf{r}_2)\exp\{-\beta(F[\psi(\mathbf{r})] - F_0)\}, \qquad (2)$$

где $D\psi(\mathbf{r})$ означает функциональное интегрирование по всем функциям

$\psi(\mathbf{r})$, $\beta = \frac{1}{k_B T}$. Нас интересует поведение $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ в пределе $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \to \infty$.

Разложим $\psi(\mathbf{r})$ вблизи ψ_0 и оставим только квадратичные члены. Записывая $\psi(\mathbf{r})$ в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = (\psi_0 + \widetilde{\psi}(\mathbf{r}))\, e^{i\varphi(\mathbf{r})},$$

получим

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathrm{const} \int D\widetilde{\psi}(\mathbf{r})\, D\varphi(\mathbf{r})\, (\psi_0 + \widetilde{\psi}(\mathbf{r}_1))\, (\psi_0 + \widetilde{\psi}(\mathbf{r}_2)) \exp\{i(\varphi(\mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{r}_2)) - \beta \Delta F[\widetilde{\psi}(\mathbf{r}), \varphi(\mathbf{r})]\}, \tag{3}$$

$$\Delta F[\widetilde{\psi}(\mathbf{r}), \varphi(\mathbf{r})] = c\psi_0^2 \int (\nabla \varphi(\mathbf{r})^2\, d\mathbf{r}).$$

Интегрирование по фазе и модулю может быть выполнено независимо. Нас будет интересовать фазовое интегрирование, так как интегрирование по модулю дает всегда конечную величину, которая даже в расчетах Райса не приводит при $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \to \infty$ к $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0$.

Разлагая $\varphi(\mathbf{r})$ в ряд Фурье, получим для фазового интеграла выражение

$$I_\varphi \sim \exp\left[-\frac{1}{\alpha_R \Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{2(1 - \cos(\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)))}{k^2}\right]. \tag{4}$$

Здесь Ω — объем системы, α_R — константа, равная, как и у Райса, $4c\psi_0^2 \frac{1}{k_B T}$. Однако для оценки величины $\psi_0^2 = -\frac{a}{b}$ в данном случае, как показано Б. Т. Гейликманом [2], надо пользоваться величинами, полученными для «грязных» сверхпроводников, в которых роль длины свободного пробега играет характерный размер L.

Непосредственный расчет дает (смотри, например, [3])

$$\alpha_R = 4c\psi_0^2 \frac{1}{k_B T} = 4 \frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{a}{b}\right) \frac{1}{T k_B} = \frac{T_c - T}{T_c}\, \xi_0 L (T_c k_B)^2\, 28\, \frac{N(0)}{k_B T},$$

где T_c — критическая температура, ξ_0 — корреляционная длина для чистого сверхпроводника, $N(0)$ — плотность состояний на поверхности Ферми. Считая $\xi_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ см, $T_c \approx 1$ К и рассматривая область температур, достаточно близких к T_c, получим $\alpha_R \approx 5{,}6\ L \cdot 10^{14}$ см$^{-1}$.

Перейдем теперь непосредственно к вычислению величины I_φ в трех случаях: для пленки, для нити с квадратным сечением и для системы, ограниченной во всех трех измерениях. Так как $G \sim I_\varphi$, которое, в свою очередь, $\sim 1/e^\gamma$, то, очевидно, разумная величина γ, при которой I_φ не будет стремиться к нулю (~ 1). Таким образом, в каждом конкретном случае мы постараемся вычислить γ, а затем из условия $\gamma \sim 1$ найдем характерный размер L. При меньших L величина γ будет больше 1 и, следовательно, I_φ можно считать малым, что соответствует разрушению упорядоченности, а тем самым и исчезновению сверхпроводимости.

Для пленки имеем

$$\frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1 - \cos(\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2))}{k^2} = \frac{1}{\Omega} \sum_{k_x k_\perp} \frac{1 - \cos(k_x x + k_\perp R_\perp \cos\varphi)}{k_x^2 + k_\perp^2} =$$

$$= \frac{1}{L}\sum_{k_x}\frac{1}{(2\pi)^2}\int\frac{1-\cos(k_x x+k_\perp R_\perp\cos\varphi)}{k_\perp^2+k_x^2}k_\perp\,dk_\perp\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4\pi L}\sum_{k_x}\ln\left(1+\frac{Q^2}{k_x^2}\right)-\frac{1}{\pi L}\sum_{k_x>0}\cos(k_x x)\,K_0(k_x R_\perp).$$

Здесь $k_x = \dfrac{2\pi n}{L}$ — квантуемый импульс,

$$k_\perp = \sqrt{k_y^2+k_z^2} < Q \sim \frac{\pi}{d},$$

где d — постоянная решетки, $R_\perp$ — расстояние между двумя точками на поверхности пленки.

Таким образом, для I_φ имеем

$$I_\varphi \sim \exp\left\{-\frac{1}{\pi L\alpha_R}\sum_{n>0}\ln\left(1+\frac{Q^2L^2}{4\pi^2n^2}\right)+\frac{2}{\pi L\alpha_R}\sum_{n>0}\times\right.$$
$$\left.\times\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)K_0\left(\frac{2\pi n}{L}R_\perp\right)\right\}. \qquad (5)$$

При $R_\perp\to\infty$

$$K_0\left(\frac{2\pi n}{L}R_\perp\right)\approx\sqrt{\frac{L}{4nR_\perp}}\,e^{-\frac{2\pi n}{L}R_\perp}$$

и второй член в (5) оказывается $\ll \dfrac{1}{10^{14}L^2}\sqrt{\dfrac{L}{R_\perp}}\,e^{-\frac{R_\perp}{L}}$,

т. е. фактически не вносит никакого вклада в (5). Оценка первого члена в (5) дает

$$n_{\max}\sim\frac{QL}{2\pi},$$

откуда при $Q\sim 3\cdot10^8$ см$^{-1}$ получим $L\geqslant 2$ Å. При $L=2$ Å имеем один член суммы и $I_\varphi\sim\dfrac{1}{e}$. При больших L $I_\varphi\sim\dfrac{1}{e^\gamma}$, где γ становится меньше 1, т. е. критическим размером является в данном случае $L=2$ Å.

Для нити с квадратным сечением

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1-\cos(\mathbf{k}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2))}{k^2}=$$

$$=\frac{1}{L^2}\sum_{k_xk_y}\frac{1}{2\pi}\int\frac{1-\cos(k_xx+k_yy+k_zz)}{k_x^2+k_y^2+k_z^2}dk_z=$$

$$=\frac{1}{L^2}\sum_{k_xk_y}\frac{1}{2\sqrt{k_x^2+k_y^2}}-\frac{1}{L^2}\sum_{k_xk_y}\frac{\cos(k_xx+k_yy)}{2\sqrt{k_x^2+k_y^2}}\,e^{-\sqrt{k_x^2+k_y^2}\,z},$$

где

$$k_x=\frac{2\pi n}{L},\quad k_y=\frac{2\pi m}{L}$$

и

$$I_\varphi \sim \exp\left\{-\frac{2}{4\pi L\alpha_R}\sum_{n,m}\frac{1}{\sqrt{n^2+m^2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{4\pi L\alpha_R}\sum_{n,m}\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{L}(nx+my)\right)}{\sqrt{n^2+m^2}}\, e^{-\frac{2\pi}{L}z\sqrt{n^2+m^2}}\right\}. \qquad (6)$$

Легко видеть, что, как и для пленки, второй член в (6) при $z\to\infty$ дает пренебрежимо малый вклад. Первый член в (6) оцениваем с помощью формулы Эйлера — Маклорена.

Тогда

$$I_\varphi \sim \exp\left\{-\frac{1}{2\pi L\alpha_R}\left(QL+4\ln QL+2\ln\frac{QL}{2\pi}\right)\right\}, \qquad (7)$$

т. е.

$$\gamma \sim \frac{1}{2\pi L\alpha_R}\left(QL+4\ln QL+2\ln\frac{QL}{2\pi}\right).$$

Считая $\gamma \sim 1$, найдем, что $L\sim 10$ Å. При меньших L $\gamma>1$ и сверхпроводимость разрушается, при больших L она существует.

В случае системы, ограниченной во всех трех измерениях, (кубик)

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1-\cos(\mathbf{k}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2))}{k^2}=\frac{1}{4\pi^2 L}\sum_{n,m,l}\frac{1-\cos\frac{2\pi}{L}(nx+my+lz)}{n^2+m^2+l^2},$$

где положили

$$k_x=\frac{2\pi n}{L},\quad k_y=\frac{2\pi m}{L},\quad k_z=\frac{2\pi l}{L}.$$

Применение формулы Эйлера — Маклорена приводит к выражению

$$I_\varphi \sim \exp\left\{-\frac{1}{2\pi^2 L\alpha_R}\left(4QL+6\pi\ln(4QL)+6\pi^2\right)\right\}. \qquad (8)$$

Считая, как обычно, $\gamma\sim 1$, получим $L\geqslant 20$ Å.

Итак, мы получили приблизительные оценки для критических размеров сверхпроводящих образцов. Предельный переход $L\to\infty$ во всех трех случаях, очевидно, есть переход к бесконечной трехмерной системе Райса (см. [1]). Для такой системы при $|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|\to\infty$ $I_\varphi\sim\exp\left(-\frac{Q}{\pi^2\alpha}\right)$ и сверхпроводимость существует. Наши результаты в целом совпадают с качественной оценкой критических размеров сверхпроводящих образцов, данной в [2].

Автор благодарит Б. Т. Гейликмана за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Reice T. M. «Phys. Rev.», **140**. A1889, 1965.
2. Гейликман Б. Т. «Успехи физических наук», **109**, 65, 1973.
3. Сан-Жам Д., Сарма Г., Томас Е. Сверхпроводимость второго рода. М., 1970.

Поступила в редакцию
30.10 1973 г.

Кафедра
квантовой статистики