Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1976

УДК 530.12 : 531.51

Г. С. АСАНОВ

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ В ФИНСЛЕРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ОСНОВАННОМ НА ПОНЯТИИ ОБЪЕМА

В работе развивается теория гравитационного поля в финслеровом пространстве специального типа, сохраняющем группу Лоренца. Одновременно исследуется структура локальной анизотропии пространства-времени, доступная в принципе прямой экспериментальной проверке. Ковариантный закон сохранения энергии-импульса гравитационного поля в касательном пространстве оказывается интегрируемым.

Вопрос о возможности формулировки последовательной теории гравитационного поля в финслеровом пространстве, структура которого согласована с основными физическими принципами, имеет актуальное значение. После того как теория финслеровых пространств [1, 2] нашла свои классические основания в книге Э. Картана «Пространства Финслера» [3], рядом авторов на основе результатов этой теории изучались математические вопросы, непосредственно возникающие при стремлении обобщить риманову геометрическую структуру на финслерову. А именно: формулировка вариационной задачи, в частности для скалярной финслеровой кривизны путем обобщения метода Палатини, исследование соответствия между кривизной финслеровых пространств и касательных к ним римановых (Хорват и Моор [4, 5], Такено [6]), формулировка аналога уравнений Эйнштейна в касательных пространствах (Такено [7]) и др. Результаты этих исследований, имеющих преимущественно формальное математическое содержание, не привели к замкнутому варианту обобщенной теории.

Оставался открытым вопрос о конкретизации типа финслерова пространства на основе физических принципов. Указывая на необходимость конкретизации, Такено отмечает [7] только, что оно не может принадлежать ряду известных типов, так как в них тензор кривизны касательных пространств равен нулю. Независимо от этих работ предположение о финслеровом отклонении римановых свойств пространства-времени было использовано Киржницем и Чечиным для объяснения аномалии спектра космических лучей [9, 10].

Выполненное ими исследование содержит указание на возможное наличие локальной анизотропии пространства-времени, описываемой финслеровой геометрией, однако экспериментальные данные не содержат пока достаточной информации о финслеровом типе. Продолжая это исследование, Богословский предположил [11, 12], что анизотропия обусловлена наличием выделенного направления, однако ряд геометрических вопросов, в том числе вопрос о сигнатуре соответствующего финслерова метрического тензора, остается неясным.

В настоящей работе развивается теория гравитационного поля и исследуется структура локальной анизотропии в финслеровом пространстве конкретного типа [13], отвечающем следующим диктуемым основными физическими принципами требованиям: 1) релятивистская сигнатура финслерова метрического тензора (§ 1); 2) транзитивность K-группы симметрии индикатрисы (§ 2); 3) касание с произвольными римановыми пространствами релятивистской сигнатуры (§ 3); 4) интегрируемость ковариантного закона сохранения энергии-импульса гравитационного поля в касательном пространстве (§ 4).

Общее содержание п. 1 очевидно; п. 2 требует, чтобы любые две локальные инерциальные системы отсчета (л. и. с. о.) были связаны кинематическим преобразованием. Через весьма важную концепцию касания, согласно п. 3, рассматриваемая ниже финслерова структура находит свою роль более первичной геометрической подструктуры римановой структуры пространства-времени. Ее существование не приводит к видоизменению эйнштейновских уравнений гравитационного поля, записываемых на касательных к финслеровой подструктуре риманова пространства (§ 3). Это обстоятельство можно рассматривать как следствие того, что изучение внутренних геометрических свойств риманова пространства не дает никакой информации о том, находится ли оно в состоянии касания с каким-либо другим пространством или нет. Является ли финслерова подструктура просто всегда возможной математической конструкцией, или же она действительно существует в природе и, следовательно, определяет локально анизотропные свойства пространства-времени, должен показать эксперимент (см. § 2). Финслерова структура дополняет риманову и дает новые конструктивные возможности для анализа ряда проблем общей теории относительности и, в частности, проблемы неинтегрируемости ковариантных законов сохранения. В § 4 приведены результаты расчета (что говорит о выполнении требований п. 4), хотя этот пункт и не так очевиден, как необходимость требований пп. 1—3.

Найденное нами финслерово пространство будет ниже введено по определению, и в процессе дальнейшего развития основанной на нем теории будет показано выполнение требований пп. 1—4.

Из расчета, результаты которого приведены в § 4, следует, что построенный по тензору кривизны касательного пространства эйнштейниан совпадает с тензором Такено (19) (см. [7]). В этом смысле можно говорить о метрическом тензоре (2) как о решении уравнений Такено. Тензор (19) был предложен Такено как простейшее выражение, отвечающее известным в финслеровой геометрии общим тождествам. Интегрируемость его ковариантного закона сохранения в общем случае не имеет места; она является следствием выражения (2).

В работах [4—7] оставалась неясной интерпретация зависимости геометрических объектов от векторов x касательных пространств. Ниже мы последовательно проводим интерпретацию зависимости от x как от векторов возможных скоростей л. и. с. о.

§ 1. Финслерова геометрия, определяемая полем реперов

На четырехмерном дифференцируемом многообразии класса C^3 зададим поле реперов $S^i_A(x)$ и им взаимных $S^A_i(x)$; $i, j, \ldots, A, B = 1, 2, 3, 4$. Измеряя длину какого-либо вектора x, принадлежащего касательному к многообразию в некоторой т. x пространству $T(x)$, корнем четвертой степени из отношения объема параллелотопа с большой диагональю $\dot{x}$ и параллельными $S_A^i(x)$ ребрами, к объему параллелотопа, построенного просто на $S_A^i(x)$, получим, как нетрудно понять (см., например, [15]):

$$F(x, \dot{x}) = \left[\prod_{A=1}^{4} (S_i^A(x)\dot{x}^i)\right]^{1/4}. \tag{1}$$

Такой способ измерения длины посредством объема дает для финслерова метрического тензора [1] следующее выражение:

$$f_{mn}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^m \partial \dot{x}^n} = \left(2\delta_m^i\delta_n^j - 4\sum_{A=1}^{4} S_A^i S_A^j S_m^A S_n^A\right) y_i y_j F^{-2}, \tag{2}$$

где

$$y_m = F\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^m} = f_{mn}(x, \dot{x})\,\dot{x}^n. \tag{3}$$

В дальнейшем всегда предполагается $\dot{x}^m S_m^A > 0$. В двумерном случае метрическая функция (1) совпадает с релятивистским интервалом. Важное свойство финслерова метрического тензора (2) состоит в том, что он при произвольном $\dot{x}$ имеет релятивистскую сигнатуру $(+---)$. Его можно рассматривать как следствие возможности задания частичной упорядоченности между векторами $a, b \in T(x)$, при которой a следует за b, если $a^m S_m^A \geqslant b^m S_m^A$ [14]. Нетрудно проверить непосредственно, что

$$f_{mn} = f_m^0 f_n^0 - f_m^1 f_n^1 - f_m^2 f_n^2 - f_m^3 f_n^3,$$

где

$$f_m^0 = \frac{y_m}{F}, \quad f_m^1 = \frac{y_n}{F\sqrt{3}}(\delta_m^n - 4S_1^n S_m^1),$$

$$f_m^2 = \frac{y_n}{F\sqrt{\dfrac{3}{2}}}(2S_2^n S_m^2 - S_3^n S_m^3 - S_4^n S_m^4), \tag{4}$$

$$f_m^3 = \frac{y_n}{F\sqrt{\dfrac{1}{2}}}(S_4^n S_m^4 - S_3^n S_n^3).$$

Выражения для взаимного к (2) тензора f^{mn} и взаимного к (4) репера f_P^m, где $P, Q = 0, 1, 2, 3$, имеют соответственно эквивалентный вид, отличаясь лишь заменой $y_m \to x^m$, $S_A^n \to S_n^A$, $S_n^A \to S_A^n$. f-Репер определяется неоднозначно, но лишь с точностью до преобразований из группы Лоренца (по индексу P).

Финслерова метрическая функция (1) определяет также другую группу локальных симметрий: группу линейных однородных преобразований с действительными коэффициентами $K_n^m(x)$ над векторами $\dot{x} \in T(x)$, оставляющих инвариантной принадлежащую $T(x)$ трехмерную гиперповерхность $F(x, \dot{x}) = 1$, называемую индикатрисой (в римановом случае она является (псевдо-) сферой). Из определения этой группы $F(x, K_n^m(x)\dot{x}^n) = F(x, \dot{x}^m)$, $\dot{x} \in T(x)$ в нашем случае (1) немедленно следует, что она является группой анизотропных унимодулярных дилатаций по направлениям S-векторов, а именно

$$K_n^m(x) = \sum_{A=1}^{4} k^A S_A^m(x) S_n^A(x), \tag{5}$$

где $k^1k^2k^3k^4 = 1$. Коэффициенты взаимного преобразования имеют аналогичный вид

$$K^{*m}_{\ n}(x) = \sum_{A=1}^{4} k_A S_A^m(x) S_n^A(x), \tag{6}$$

где $k_A = 1/k^A$.

§ 2. Группа кинематических преобразований

Возьмем два каких-либо вектора $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2 \in T(x)$ и обозначим

$$a^m = \dot{x}_1^m / F(x, \dot{x}_1), \quad b^m = \dot{x}_2^m / F(x, \dot{x}_2).$$

Так как связывающее их K-преобразование находится однозначно (достаточно в (5) положить $k^A = (S_m^A b^m)(S_n^A a^n)^{-1}$), то K-группа действует транзитивно на индикатрисе. Четыре собственные оси координат двух л. и. с. о. с векторами скорости a^m и b^m (предполагается, конечно, $a^m S_m^A > 0$, $b^m S_m^A > 0$) геометрически отобразятся реперами $f_P^m(x, a)$ и $f_P^m(x, b)$ соответственно, а также им взаимными. Справедливо, как нетрудно убедиться.

$$f_P^m(x, b) = K_n^m f_P^n(x, a), \quad f_m^P(x, b) = K^{*n}_{\ m} f_n^P(x, a). \tag{7}$$

Это преобразование дает закон перехода между базисами рассматриваемых л. и. с. о. Поэтому K-группа находит свою физическую интерпретацию как группа кинематических преобразований. В отличие от нее группа Лоренца является группой симметрии (группой Клейна, с геометрической точки зрения) каждой выбранной системы отсчета. Формально, K-группа действует на векторный индекс m, группа Лоренца — на нумерующий индекс P реперов f_P^m, f_m^P. Наглядный смысл преобразования $b^m = K_n^m a^n$ состоит в том, что оно связывает такие пары векторов a, $b \in T(x)$, которые относительно базисов собственных л. и. с. о., преобразуемых ими друг в друга, имеют одинаковые координаты, т. е. $a^m f_m^P(x, a) = b^m f_m^P(x, b)$, как следствие (7).

Зафиксируем вектор a^n. Относительно л. и. с. о. с базисным репером $f_m^P(x, a)$ произвольный вектор $\dot{x} \in T(x)$ имеет координаты

$$\dot{x}^P = f_n^P(x, a)\, \dot{x}^n. \tag{8}$$

В частности, используя (4), находим

$$\frac{S_1^P}{S_1^0} = C_1^P = \{1, -\sqrt{3}, 0, 0\}, \quad \frac{S_2^P}{S_2^0} = C_2^P = \left\{1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{8}{3}}, 0\right\},$$

$$\frac{S_3^P}{S_3^0} = C_3^P = \left\{1, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{2}\right\}, \tag{9}$$

$$\frac{S_4^P}{S_4^0} = C_4^P = \left\{1,\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\sqrt{\frac{2}{3}},\ \sqrt{2}\right\}.$$

Имеет место $S_P^A/S_0^A = C_P^A = C_A^P$. Так как $F(x, a) = 1$ по определению, то

$$\prod_{A=1}^{4} S_0^A = 1. \tag{10}$$

Используя (9), нетрудно проверить следующие тождества:

$$\sum_{A=1}^{4} C_A^P = \delta_0^P, \qquad \sum_{A\neq B} C_A^\alpha C_B^\beta = -2\delta^{\alpha\beta}, \tag{11}$$

где $\alpha,\ \beta = 1, 2, 3$.

Теперь можно сравнить дисперсионное соотношение, отвечающее группе Лоренца

$$(k^0)^2 - \delta_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = (M)^2, \tag{12}$$

с другим дисперсионным соотношением, отвечающим K-группе, $[F(k)]^4 = (M)^4$, или в явной записи с учетом определения (1) и структуры коэффициентов (9), а также тождеств (10)—(11),

$$(k^0)^4 - 2\delta_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta + \frac{4\sqrt{3}}{9}[k^1 - k^3\sqrt{2}]\,[-(k^1\sqrt{2} + k^2)^2 + 3(k^3)^2]\,k^0 -$$

$$- k^1(k^1 + k^2\sqrt{8})\left[\frac{1}{3}(k^1 - k^2\sqrt{2})^2 - 2(k^3)^2\right] = (M)^4. \tag{13}$$

Расхождение между (12) и (13) начинается лишь с членов порядка $(k^\alpha/M)^3$, тем не менее для шести направлений, которые находятся из условия равенства нулю выражений перед k^0 в степени 1 и 0 в многочлене (13), например, $k^1 = k^2 = 0$, совпадение соотношений (12) и (13) точное. Порядок приближения соответствия $k^0 = k_0$, $k^\alpha = -k_\alpha$ к соответствию $k^P = F^{PQ}(k)k_Q$, естественно, на единицу ниже.

Очевидно, $a^P = \delta_0^P$. Скорости движения л. и. с. о. с вектором скорости b^m относительно л. и. с. о. с вектором скорости a^m и обратная ей будут, как нетрудно понять, соответственно равны

$$u^P_{(ba)} = K_0^P = b^P = \frac{1}{4}\sum_{A=1}^{4} C_A^P k^A,$$

$$\overset{*}{u}{}^P_{(ab)} = \overset{*}{K}{}_0^P = \frac{1}{4}\sum_{A=1}^{4} C_A^P k_A$$

(использовано равенство $S_0^A = 1/4\ S_A^0$, следующее из (2)—(4)). Отвечающие им трехмерные скорости равны

$$V^\alpha_{(ba)} = \frac{u^\alpha_{(ba)}}{u^0_{(ba)}} = \frac{K_0^\alpha}{K_0^0},$$

$$\overset{*}{V}{}^\alpha_{(ab)} = \frac{\overset{*}{u}{}^\alpha_{(ab)}}{\overset{*}{u}{}^0_{(ab)}} = \frac{\overset{*}{K}{}_0^\alpha}{\overset{*}{K}{}_0^0}.$$

Принцип взаимности обратных скоростей, которому отвечает равенство $V^{\alpha}_{(ba)}=-V^{\alpha}_{(ab)}$, играющий большую конструктивную роль в структуре группы Лоренца (см. [16]), будет выполняться лишь приближенно: $V^{\alpha}_{(ab)}=-V^{\alpha}_{(ba)}+O\,(V^{\alpha}_{(ba)})^2$.

Величины C^P_A, C^A_P имеют ясный физический смысл инвариантных относительно K-преобразований скоростей, как это следует из (5)—(6) и их определения после простого рассмотрения.

Генераторы K-группы нетрудно найти. В качестве независимых параметров удобно выбрать V^{α}. Из (5) получим $K^P_Q=\delta^P_Q+I^P_{Q,\alpha}V^{\alpha}+$ $+o(V^{\alpha})$, где искомые генераторы равны

$$I^P_{Q,\alpha}=\frac{1}{4}\sum_{A=1}^{4}C^P_AC^A_QC^A_{\alpha}.$$

Они коммутируют друг с другом. Следовательно, K-группа является трехпараметрической абелевой группой. Она не содержит чисто пространственных (трехмерных) преобразований реперов, так как из (5) и определения V^{α} немедленно следует $K^P_Q(V^{\alpha}=0)=\delta^P_Q$. В этом смысле она содержит чисто кинематические преобразования.

Так как группа Лоренца является группой симметрий каждой л. и. с. о., то согласие настоящего подхода с экспериментальным базисом современной физики, основанном на группе Лоренца, сохраняется. Однако группа кинематических преобразований, описывающая переходы между различными л. и. с. о., не обязана априори совпадать с группой Лоренца: в развитой выше теории она совпадает с K-группой. В сущности на этом возможном различии основано обобщение римановой структуры пространства-времени на финслерову. Первую естественно называть локально-изотропной, вторую — локально-анизотропной. До сих пор, насколько известно автору, прямые измерения анизотропии пространства-времени не проводились. Ее обнаружение имело бы очень большое значение для теории полей и частиц. Прямые измерения предполагают наличие по крайней мере двух различных л. и. с. о., т. е. связанных с двумя различными телами. Если при их инерциальном движении в непосредственной близости друг от друга измерять пространственно-временные характеристики сигналов приборами обоих л. и. с. о., базисы которых согласованы с лоренцевыми инвариантами внутри каждой л. и. с. о., то возможно проверить существование предполагаемых анизотропных эффектов (например, отмеченное выше нарушение принципа взаимности). Записанные выше формулы содержат необходимую информацию для оценок; систематическое изложение будет дано в другой работе.

§ 3. Касание с римановыми пространствами

Вследствие зависимости метрического тензора (2) от векторов $\dot{x}\in T(x)$ с финслеровым пространством вдоль различных конгруэнций кривых $l^i(x)$ касаются различные римановы пространства с метрическим тензором

$$g_{mn}(x)=f_{mn}(x,\,l(x)).$$

Риманово пространство является частным случаем финслерова в том смысле, что с ним по всевозможным конгруэнциям касается одно и то же риманово пространство, совпадающее с исходным. Введенное выше финслерово пространство согласовано с формализмом общей теории относительности в ее римановой формулировке вследствие того, что любое риманово пространство релятивистской сигнатуры $(+---)$ может, и весьма простым способом, рассматриваться как касательное к нему. Действительно, рассмотрим конгруэнцию

$$S^i(x)=\sum_{A=1}^{4} S^i_A(x).$$

Возьмем произвольное риманово пространство с метрическим тензором $g_{mn}(x)$ вышеуказанной сигнатуры и обозначим через $h^P_m(x)$ какое-либо поле его собственных тетрад. Подстановка S^m вместо $\dot{x}^m$ в (4) показывает, что $f^P_n(x, S(x))$ и $S^A_m(x)$ связаны линейным невырожденным преобразованием с действительными коэффициентами. После отождествления h^P_m и $f^P_m(x, S(x))$ нетрудно выразить S^A_m через h^P_m и тем самым получить такой финслеров метрический тензор (2), что искомое равенство $g_{mn}(x)=f_{mn}(x, S(x))$ выполняется.

Подстановка S^m в (2) после несложных преобразований дает

$$g_{mn}=\frac{1}{8}\sum_{A=1}^{4} S^A_m \sum_{B=1}^{4} S^B_n-\frac{1}{4}\sum_{A=1}^{4} S^A_m S^A_n.$$

Уравнения Эйнштейна для этого риманова метрического тензора будут одновременно уравнениями для искомых векторов $S^A_m(x)$ эквивалентными уравнениями Эйнштейна в тетрадной формулировке.

§ 4. Интегрируемый ковариантный закон сохранения энергии-импульса гравитационного поля в касательном пространстве

По определению (2) запись символов Кристоффеля касательного пространства упрощается:

$$C_{mnk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_{mn}}{\partial \dot{x}^k}+\frac{\partial f_{km}}{\partial \dot{x}^n}-\frac{\partial f_{nk}}{\partial \dot{x}^m}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial f_{mn}}{\partial \dot{x}^k}. \tag{14}$$

Этот объект симметричен по всем индексам и является геометрическим тензором, так как дифференцирование по векторам является тензорной операцией. Из однородности финслерова метрического тензора по векторам $\dot{x}$ нулевой степени следует тождество

$$C_{mnk}(x, \dot{x})\,\dot{x}^k=0. \tag{15}$$

Запишем по обычной в римановой геометрии формуле (дифференцируя по векторам $\dot{x}$) тензор кривизны касательного пространства, который мы обозначим через $-\widehat{S}_i{}^j{}_{mn}$. Вследствие очевидного тождества $\partial f^{mn}/\partial \dot{x}^l=-2C^{mn}{}_l$ мы получим просто

$$\widehat{S}_i{}^j{}_{mn}=C_{kin}C^{jk}{}_m-C_{kim}C^{jk}{}_n. \tag{16}$$

В нашем случае подстановка (2) в (14) с учетом (3) дает

$$C_{kin}=(y_k f_{in}+y_i f_{nk}+y_n f_{ki})F^{-2}-4y_k y_i y_n F^{-4}+16F^{-4}\sum_{A=1}^{4}(y_m S^m_A)^3 S^A_k S^A_i S^A_n. \tag{17}$$

Как нетрудно убедиться, эти коэффициенты обладают следующим замечательным свойством:

$$C^k_{ik} = f^{kn}C_{kin} = 0, \tag{18}$$

которое, очевидно, эквивалентно утверждению, что детерминант финслерова метрического тензора не зависит от векторов $\dot{x}$. Тождество (18) лежит в основе дальнейших расчетов. После подстановки (17) в (16) несложной, хотя и несколько громоздкой, выкладкой находим

$$F^2\widehat{S}_{ijmn} = f_{in}f_{jm} - f_{im}f_{jn} - y_j(y_m f_{in} - y_n f_{im})F^{-2} + \\ + y_i(y_m f_{jn} - y_n f_{jm})F^{-2}.$$

(Пространство оказывается принадлежащим $S3$-типу [8]). Отсюда легко находим тензор энергии-импульса гравитационного поля в касательном пространстве

$$T^{mn} = -\lambda\left(\widehat{S}^{mn} - \frac{1}{2}f^{mn}\widehat{S}\right) = \frac{\lambda}{F^2}\left(f^{mn} + \frac{2\dot{x}^m\dot{x}^n}{F^2}\right), \tag{19}$$

где λ — константа. Он совпадает с тензором, предложенным Такено [7], и в этом смысле финслеров метрический тензор (2) является решением уравнений Такено в касательном пространстве. При гидродинамической аналогии он отвечает представлению о гравитационном поле как об идеальной жидкости с отношением давления к плотности, равным $^1/_3$ по абсолютной величине, с положительной плотностью F^{-4} и отрицательным давлением. Последнее обстоятельство правильно отражает тенденцию гравитационного поля к сжатию (в противоположность к тенденции идеального газа к расширению). Из тождеств Бьянки следует ковариантный закон его сохранения

$$T^{mn}{}_{\parallel n} = \frac{\partial T^{mn}}{\partial \dot{x}^n} + C^m_{nl}T^{nl} + C^n_{nl}T^{ml} = 0.$$

Он действительно является законом сохранения, так как вследствие нашей конкретизации финслерова пространства из (19) и тождеств (15) и (18) немедленно следует

$$T^{mn}{}_{\parallel n} \equiv \frac{\partial T^{mn}}{\partial \dot{x}^n},$$

т. е. его интегрируемость.

Переходя к координатам локального наблюдателя, с помощью (8) нетрудно найти T^{PQ}. В частности,

$$T^{00} = \frac{\lambda}{F^4(\dot{x}^P)}[3(\dot{x}^0)^2 - \delta_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta] > 0$$

(напомним, что всегда предполагается $\dot{x}^n S^A_n > 0$). Выражение для $F^4(\dot{x}^P)$ совпадает с левой частью (13) при формальной замене k^P на $\dot{x}^P$.

Во всех формулах настоящего параграфа координаты многообразия могут рассматриваться как параметры.

За отсутствием места мы не имеем возможности в полной мере изложить здесь теорию законов сохранения в касательных пространствах, а также провести последовательную формулировку теории электромагнитного поля в финслеровом пространстве рассматриваемого типа. Изложение этих вопросов должно сопровождаться более полным развитием математической теории, основанного на понятии четырехмерного объема финслерова пространства, определяемого полем реперов. Этим вопросам будут посвящены дальнейшие публикации.

В заключение автор благодарит проф. А. А. Соколова за поддержку, а также проф. Э. Г. Позняка за обсуждение рассмотренных в настоящей работе вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rund H. The Differential Geometry of Finsler Spaces. Berlin, Springer—Verlag, 1959.
2. Лаптев Б. Л. Автореферат док. дисс. Казанск. ун-т, 1958.
3. Cartan E. Les espaces de Finsler. Paris, Hermann, 1934.
4. Horvath J., Moor A. «Ned. Akad. Wet. Proc. Ser.», A 58, 421—429, 1955.
5. Horvarth J. I. «Nouvo Cimento», 9, Suppl. N 2, 444—496, 1958.
6. Takano Y. «Progr. Theor. Phys.», 40, 1159—1180, 1962.
7. Takano Y. «Lett. Nouvo Cimento», 10, N 17, 1974.
8. Matsumoto M. «Tensor», 22, N 2, 201—204, 1971.
9. Киржниц Д. А., Чечин В. А. «Письма в ЖЭТФ», 14, 261, 1971.
10. Киржниц Д. А., Чечин В. А. «Ядерная физика» 15, 1051, 1972.
11. Богословский Г. Ю. ДАН СССР, 213, 1055, 1973.
12. Богословский Г. Ю. В сб.: «Актуальные проблемы физики элементарных частиц», ОИЯИ, Дубна, 1975, с. 39.
13. Асанов Г. С. Тезисы 6-й Всесоюзной геометрической конференции. Вильнюс, 1975, стр. 19.
14. Владимиров Ю. С. В сб.: «Современные проблемы гравитации». Тбилиси, 1967, с. 407.
15. Широков П. А. Тензорное исчисление. Казань, 1961.
16. Berzi V., Gorini V. «J. of Math. Phys.», 10, 8, 1969.

Поступила в редакцию
29.1 1975 г.

Кафедра
теоретической физики