6. Клышко Д. Н., Пенин А. Н., Полковников Б. Ф. «Письма в ЖЭФ», 11, 11, 1970.

Поступила в редакцию
11.7 1974 г.

Кафедра
волновых процессов

УДК 528.06

А. Б. БОНДАРЕНКО

МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА ОШИБКИ ТРАНСФОРМАЦИИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

При исследовании гравитационного, электрического или магнитного поля Земли на ее поверхности измеряют напряженности этих полей. Чтобы сделать какие-либо выводы о распределении их источников внутри Земли, на практике рассматривают аномальные поля как напряженностей, так и их производных. Но измерения содержат в себе и случайную ошибку. При пересчете в высшие производные эти ошибки значительно искажают поле полезного сигнала. Поэтому выполним редукцию измеренного поля на некоторую высоту, где случайные ошибки можно считать уже достаточно малыми, а полезный сигнал искаженным минимально. Для определения оптимальной высоты редуцирования составим следующую функцию.

В случае пересчета аномалий напряженности на высоту:

$$e = g_0 - g_H + n_H.$$

В случае пересчета аномалий напряженности на высоту в значении высших производных:

$$e_\xi = \xi_0 - \xi_H + n_{\xi H} g_0,$$

где g_0 — измеренный на поверхности полезный сигнал,

$$g_H = \frac{H}{2\pi} \iint\limits_S \frac{g_0\, dx\, dy}{(x^2 + y^2 + H^2)^{3/2}} = K_H,$$

g_H — значение этой же величины на высоте H, $n_H = K_H n_0$ — значение ошибки наблюдения после пересчета на высоту, K_H — оператор пересчета на высоту,

$$\xi_0 = \frac{\partial}{\partial H} g_0 = \frac{\partial}{\partial H} \left(\frac{H}{2\pi} \iint\limits_S \frac{g_0\, dx\, dy}{(x^2 + y^2 + H^2)^{3/2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \frac{(x^2 + y^2 - 2H^2)\, g_0\, dx\, dy}{(x^2 + y^2 + H^2)^{5/2}} \Bigg|_{H=0} = K_{\xi 0}\, g_0,$$

$$\xi_H = K_{\xi H}\, g_0,$$

$$n_{\xi H} = K_{\xi H}\, n_0.$$

Минимизируя дисперсии данных функций, найдем оптимальные высоты H_g и H_ξ. Выполняя статистическую обработку исходного поля аномалий, вычислим корреляционные функции полезного сигнала и помехи. Считая поле измеренных аномалий однородным, получим корреляционные функции полезного сигнала $R_g(x, y)$ и помехи $R_n(x, y)$, которые зависят лишь от расстояния между точками. Тогда спектральная плотность исходного полезного сигнала будет

$$\zeta_g(u, v) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} R_g(x, y)\, e^{-i(ux+vy)}\, dx\, dy$$

и спектральная плотность помехи

$$\zeta_n(u,\ v) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} R_n\ (x,\ y)\, e^{-i(ux+vy)}\, dx\, dy.$$

Передаточная функция для пересчета на высоту

$$\Phi(u,\ v,\ H) = e^{-i(u\xi+v\eta)} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} K(x'-\xi,\ y'-\eta,\ H)\, e^{i(ux'+vy')}\, dx'\, dy'$$

и для пересчета на высоту в производные $\partial/\partial H\ g$:

$$\Phi_\xi(u,\ v,\ H) = e^{-i(u\xi+v\eta)} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} K_\xi(x'-\xi,\ y'-\eta,\ H)\, e^{i(ux'+vy')}\, dx'\, dy'.$$

Учитывая то, что $K(u,\ v,\ H)$ и $K_\xi(u,\ v,\ H)$ — функции четные, и выполняя замену переменных $x = x - \xi$ и $y = y - \eta$, получим

$$\Phi(u,\ v,\ H) = 4\iint\limits_{0}^{\infty} K(x,\ y,\ H)\cos(ux)\cos(vy)\, dx\, dy$$

и

$$\Phi_\xi(u,\ v,\ H) = 4\iint\limits_{0}^{\infty} K_\xi(x,\ y,\ H)\cos(u,\ x)\cos(v,\ y)\, dx\, dy.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$\Phi(u,\ v,\ H) = e^{-H\sqrt{u^2+v^2}}. \qquad (1)$$

Поскольку

$$\Phi_\xi(u,\ v,\ H) = \partial/\partial H\Phi(u,\ v,\ H),$$

то

$$\Phi_\xi(u,\ v,\ H) = -\sqrt{u^2+v^2}\ e^{-H\sqrt{u^2+v^2}}. \qquad (2)$$

Если полагать, что полезный сигнал и помеха некоррелируемы, то, квадрируя исследуемые функции e и e_ξ, получим спектральную плотность выходного сигнала функции e в виде

$$S_e(u,\ v) = \zeta_g(u,\ v)\,[1-\Phi(u,\ v,\ H)]^2 + \zeta_n(u,\ v)\,[\Phi(u,\ v,\ H)]^2$$

и функции e_ξ в виде

$$S_\xi(u,\ v) = \zeta_g(u,\ v)\,[\Phi_\xi(u,\ v,\ 0) - \Phi_\xi(u,\ v,\ H)]^2 + \zeta_n(u,\ v)\,[\Phi_\xi(u,\ v,\ H)]^2.$$

Дисперсии трансформаций исследуемых функций соответственно равны:

$$D_e(H) = \iint\limits_{0}^{\infty} S_e(u,\ v)\, du\, dv = \iint\limits_{0}^{\infty} \zeta_g(u,\ v)\,[1-\Phi(u,\ v,\ H)]^2\, du\, dv +$$

$$+\iint\limits_{0}^{\infty} \zeta_n(u,\ v)\,[\Phi(u,\ v,\ H)]^2\, du\, dv$$

и

$$D_\xi(H) = \iint\limits_{0}^{\infty} S_\xi(u,\ v)\, du\, dv = \iint\limits_{0}^{\infty} \zeta_g(u,\ v)\,[\Phi_\xi(u,\ v,\ 0) - \Phi_\xi(u,\ v,\ H)]^2\, du\, dv +$$

$$+\iint\limits_{0}^{\infty} \zeta_n(u,\ v)\,[\Phi_\xi(u,\ v,\ H)]^2\, du\, dv.$$

Или, учитывая (1) и (2):

$$D_e(H) = \int_0^{\infty}\int \zeta_g(u, v)\,[1 - e^{-H\sqrt{u^2+v^2}}]^2\,du\,dv + \int_0^{\infty}\int \zeta_n(u, v)\,e^{-2H\sqrt{u^2+v^2}}\,du\,dv$$

и

$$D_{\xi}(H) = \int_0^{\infty}\int \zeta_g(u, v)\,(u^2+v^2)\,[1 - e^{-H\sqrt{u^2+v^2}}]^2\,du\,dv +$$

$$+ \int_0^{\infty}\int \zeta_n(u, v)\,(u^2+v^2)\,e^{-2H\sqrt{u^2+v^2}}\,du\,dv.$$

Минимизируя $D_e(H)$ и $D_{\xi}(H)$, определим высоты H_e и H_{ξ_1}, при которых данные функции имеют минимум.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гладкий К. В. Гравиразведка и магниторазведка. М., 1967.
2. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений. М.—Л., 1951.

Поступила в редакцию
10.10 1974 г.

Кафедра
небесной механики и гравиметрии

УДК 621.373

В. В. КАРПОВ, И. И. МИНАКОВА

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ДВУХЧАСТОТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА АВТОГЕНЕРАТОР

Процессы установления автономного режима [1] или синхронного режима при воздействии на автогенератор гармонической внешней силы рассматривались неоднократно [2—4]. Стационарные процессы, не говоря уже о процессах установления, при воздействии на автогенератор сигнала сложной формы или ряда гармонических сил исследованы гораздо меньше, особенно в теоретическом плане. В предлагаемом сообщении рассматриваются переходные процессы при воздействии на автогенератор двух гармонических сил.

Уравнение движения в неавтономной системе для рассматриваемой задачи

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + 2\delta(x)\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \omega_0^2 \sum_j P_j \cos\omega_j t. \qquad (1)$$

Здесь

$$j = 2,\ P_1 = P_2,\ \delta(x) = \delta_0' + \delta_2 x^2 \quad (\delta_0' < 0,\ \delta_2 < 0).$$

В первом приближении движение в автогенераторе с мягким предельным циклом [5] при синхронизации хотя бы одним из внешних воздействий может быть записано в виде

$$x = A_{\Gamma}\sin\omega_0 t + \sum_{j=1}^{4} A_j \sin(\omega_j t - \varphi_j), \qquad (2)$$

где

$$\omega_3 = 2\omega_1 - \omega_2, \quad \omega_4 = 2\omega_2 - \omega_1.$$

При этом учтены спектральные составляющие с частотами ω_3 и ω_4 (кроме ω_0, ω_1 и ω_2) и не учтены спектральные составляющие с частотами $3\omega_1—2\omega_2$ и