Таким образом, возникает дополнительно высокочастотный разряд с характерным гистерезисом. Естественно, точки срыва и скачка в частотной зависимости $\Delta V(\omega)$ определяются общим условием баланса.

При действующем значении $V_{\sim}=14$ В (рис. 4) производились зондовые измерения в возмущенной области при различных значениях частоты ω. В пределах точности измерений электронная температура оставалась неизменной, однако концентрация электронов существенно зависит от частоты. В табл. 2 приведены значения концентрации n_e для различных точек частотной зависимости $\Delta V(\omega)$.

Следует отметить, что значения n_e в табл. 2 несколько завышены вследствие влияния высокочастотного поля на измерительный зонд, однако относительное увеличение концентрации несомненно, что подтверждается увеличением свечения в возмущенной области разряда с возрастанием ω.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годяк В. А., Иванов А. Н., Кузовников А. А. ЖТФ, 37, 6, 1967.
2. Pavkovich I., Kino G. S. Proc. VI Intern. Conf. on Ionisation Phenomena in Gases. Paris, 1963.
3. Harp R. S., Crawford F. W. «J. Appl. Phys.», 35, N 12, 1964.
4. Toshihiko D., Ichimiya T. «J. Appl. Phys.», 36, No. 6, 1965.
5. Lepechinsky D., Rolland P. «Compt. Rend. Ac. Sc.», 262, 1966.
6. Akao Yasua, Ida Yoshio. «J. Appl. Phys.», 35, No. 9, 1964.
7. Messiaer A., Vandenplas P. E. «Phys. Lett.», 20, No. 1, 1966.

Поступила в редакцию
4.II 1974 г.

Кафедра
электроники

УДК 538.3

А. Б. КУКАНОВ, Н. Д. НАУМОВ

ЗАРЯД В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ КВАДРУПОЛЬНОГО ТИПА

Как известно, уравнение Гамильтона — Якоби является основой весьма общего метода интегрирования уравнений движения. В этой связи разработка методов решения этого уравнения и получение новых точных решений являются важной задачей теории движения частицы во внешнем поле. В данной работе для этой цели предлагается применить тетрадный метод, получивший широкое распространение в теории гравитации.

Мы рассматриваем изотропную тетраду k^n, l^n, a^n, a^{*n}:

$$\begin{gathered}(kl) \equiv k_n l^n = k_0 l_0 - \mathbf{k}\mathbf{l} = -(aa^*) = 1, \\ (aa) = (ak) = (al) = (kk) = (ll) = 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Вводя тетрадные компоненты 4-вектора $x^n = (ct, \mathbf{r})$:

$$\xi = (kx), \ \zeta = (lx), \ \chi = (ax), \ \chi^* = (a^*x),$$

уравнение Гамильтона — Якоби

$$g^{nr}\left(\frac{\partial S}{\partial x^n} + \frac{e}{c} A^n\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x^r} + \frac{e}{c} A_r\right) = m^2c^2, \tag{2}$$

где A^n — потенциал внешнего электромагнитного поля

$$\left(\text{считаем } \operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = 0, \ \operatorname{div}\mathbf{E} = 0\right)$$

можно записать в виде [1]

$$\frac{\partial S}{\partial \xi}\frac{\partial S}{\partial \zeta}-\frac{\partial S}{\partial \chi}\frac{\partial S}{\partial \chi^*}+\frac{e}{c}\left[(kA)\frac{\partial S}{\partial \xi}+(lA)\frac{\partial S}{\partial \zeta}+\right.$$

$$\left.+(aA)\frac{\partial S}{\partial \chi}+(a^*A)\frac{\partial S}{\partial \chi^*}+\frac{e}{c}(AA)\right]=\frac{m^2c^2}{2}. \qquad (3)$$

Если $A^n=A^n(\xi,\chi,\chi^*)$, то S следует искать в виде $S=-\gamma\zeta+F(\xi,\chi,\chi^*)$, γ — const. Для F получается уравнение, которое при условии, что (kA) является функцией только одной переменной ξ, имеет вид нерелятивистского уравнения Гамильтона—Якоби. Для простоты ограничимся случаем $(kA)=(aA)=(a^*A)=0$, некоторые другие случаи рассмотрены в работах [2]. В этом случае, разлагая $\chi=\frac{1}{\sqrt{2}}(u+iv)$, для F получаем

$$\frac{\partial F}{\partial \xi}+\frac{1}{2\gamma}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2\right]+\frac{e}{c}(lA)+\frac{m^2c^2}{2\gamma}=0. \qquad (4)$$

Можно получить точное решение уравнения (4), если (lA) является квадратичной функцией переменных u, v и произвольной функцией ξ [1]. Интерес представляет потенциал

$$A^n=\left[\frac{1}{2}f\chi^2+\frac{1}{\sqrt{2}}w(\xi)\chi+\text{к. с.}\right]k^n,\quad f=f^*=\text{const}, \qquad (5)$$

что соответствует следующим полям:

$$\mathbf{E}=\left(f\chi+\frac{1}{\sqrt{2}}w\right)(k_0\mathbf{a}-a_0\mathbf{k})+\text{к. с.},$$

$$\mathbf{H}=\left[\mathbf{k}\left(f\chi\mathbf{a}+\frac{1}{\sqrt{2}}w\mathbf{a}+\text{к. с.}\right)\right],\quad (\mathbf{EH})=H^2-E^2=0.$$

В системе отсчета, где

$$k^n=(1,\ 0,\ 0,\ 1),\ l^n=\frac{1}{2}(1,0,0,-1),\ a^n=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,i,0),\ a^{*n}=(a^*)^n, \qquad (6)$$

поля принимают вид

$$\mathbf{E}=(-fx+\widetilde{E}_x(\xi),\ fy+\widetilde{E}_y(\xi),\ 0),\ \xi=ct-z,$$

$$\mathbf{H}=(-fy-\widetilde{E}_y(\xi),\ -fx+\widetilde{E}_x(\xi),\ 0),$$

что соответствует постоянному электромагнитному полю квадрупольного типа и плоской волне, распространяющейся вдоль оси Oz.

Решение уравнения (4) при условии (5) ищем в виде

$$F=Qu^2+Rv^2+2Mu+2Nv+L,$$

где $Q,\dots,L$ — функции ξ, подлежащие определению. Окончательно получаем

$$S=-\gamma\zeta+\frac{\omega}{2}\left\{[u^2+(\mu+u_0)^2]\operatorname{ctg}\varphi+[v^2+(\nu+v_0)^2]\operatorname{cth}\varphi-\right.$$

$$\left.-\frac{2u}{\sin\varphi}(\mu+u_0)-\frac{2v}{\operatorname{sh}\varphi}(\nu+v_0)-2(\rho u_0+\lambda v_0)\right\}-$$

$$-\frac{m^2c^2}{2\gamma}\xi-\frac{e}{c}\int\mu\operatorname{Re}w\cos\varphi d\xi+\frac{e}{c}\int\nu\operatorname{Im}w\operatorname{ch}\varphi d\xi+\Gamma, \qquad (7)$$

$$\begin{pmatrix}\mu\\ \rho\end{pmatrix}=\frac{e}{\omega c}\int\begin{pmatrix}\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}\operatorname{Re}w d\xi,\quad \begin{pmatrix}\nu\\ \lambda\end{pmatrix}=-\frac{e}{\omega c}\int\begin{pmatrix}\operatorname{sh}\varphi\\ \operatorname{ch}\varphi\end{pmatrix}\operatorname{Im}w d\xi,$$

$\varphi=\frac{\omega}{\gamma}\xi$, $\omega^2=\frac{ef\gamma}{c}$, для определенности $ef>0$. Полученное выражение S кроме аддитивной постоянной Γ, содержит требуемое число независимых постоянных интегрирования: γ, u_0, v_0. Дифференцирование функции S по этим константам позволяет найти ζ, u, v, что определяет закон движения частицы в параметрической форме (параметр ξ):

$$x^n(\xi) = \xi l^n + \zeta k^n - u r^n - v s^n,$$

где

$$r^n = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^n + a^{*n}), \quad s^n = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^{*n} - a^n).$$

Дифференцирование S по ξ, ζ, u, v дает соответствующие компоненты обобщенного импульса $P^n = p^n + \frac{e}{c} A^n$:

$$\frac{\partial S}{\partial \xi} = -(lP), \quad \frac{\partial S}{\partial \zeta} = -(kP), \quad \frac{\partial S}{\partial u} = (rP), \quad \frac{\partial S}{\partial v} = (sP).$$

Движение заряда в поле плоской электромагнитной волны достаточно хорошо изучено [3—6]. Здесь мы рассмотрим движение заряда в постоянном неоднородном поле, т. е. положим $w=0$. В этом случае

$$\zeta = \zeta_0 + \frac{\omega}{4\gamma}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{(rp_0)^2}{\omega^2} - u_0^2\right)\sin 2\varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{(sp_0)^2}{\omega^2} + v_0^2\right)\operatorname{sh} 2\varphi - \right.$$

$$\left. - \frac{2(rp_0)u_0}{\omega}\sin^2\varphi + \frac{2(sp_0)v_0}{\omega}\operatorname{sh}^2\varphi + \frac{\xi}{4\gamma^2}\left[m^2c^2 + 2\gamma(lp_0) + \omega^2(u_0^2 - v_0^2)\right]\right],$$

$$u = u_0 \cos\varphi + \frac{(rp_0)}{\omega}\sin\varphi, \qquad (8)$$

$$v = v_0 \operatorname{ch}\varphi + \frac{(sp_0)}{\omega}\operatorname{sh}\varphi,$$

$$(rp) = (rp_0)\cos\varphi - u_0\omega\sin\varphi,$$

$$(sp) = (sp_0)\operatorname{ch}\varphi + v_0\omega\operatorname{sh}\varphi, \qquad (9)$$

$$(lp) = (lp_0) + \frac{\omega^2}{2\gamma}(v^2 - u^2 + u_0^2 - v_0^2),$$

$$(kp) = (kp_0) = \gamma.$$

Заметим, что при $ef>0$ в законе движения (8)—(9) $u \to v$, $v \to u$. В системе отсчета, где имеет место (6), т. е. $A^n = \frac{f}{2}(x^2 - y^2, 0, 0, x^2 - y^2)$, имеем $u = -x$, $v = -y$. Таким образом, рассматриваемое поле разделяет пучок частиц по знаку их заряда. Интересно отметить, что в этом случае уравнение Клейна — Гордона допускает точное решение. Имеем

$$\left[\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi\right)^2 - c^2\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - m^2c^4\right]\Psi = 0. \qquad (10)$$

Решение ищем в виде

$$\Psi = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathscr{E}t}\psi_{\mathscr{E}}, \quad \psi_{\mathscr{E}} = U(x)V(y)\frac{e^{\frac{i}{\hbar}p_3 z}}{\sqrt{2\pi\hbar}}.$$

После замены переменных

$$\eta = \alpha x, \quad \theta = \alpha y, \quad \alpha = \left(\frac{ef\gamma}{c\hbar^2}\right)^{1/4}, \quad ef > 0,$$

для U и V получаем уравнения $\left(\gamma = \frac{\mathscr{E}}{c} - p_3\right)$

$$U'' + \left[\frac{1}{(\alpha\hbar)^2}\left(\frac{\mathscr{E}^2}{c^2} - p_3^2 - m^2c^2\right) - 2\varepsilon - \eta^2\right] U = 0, \tag{11}$$

$$V'' + (2\varepsilon + \theta^2) V = 0, \tag{12}$$

решения которых имеют вид [7]

$$U_N = \left[N!\, 2^N \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\right]^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\eta^2} H_N(\eta), \tag{13}$$

$$V_\varepsilon = C_\varepsilon \{D_{-\frac{1}{2}+i\varepsilon}[(1-i)\theta] \pm D_{-\frac{1}{2}+i\varepsilon}[-(1-i)\theta]\}, \tag{14}$$

а энергия определяется условием

$$\frac{1}{(\alpha\hbar)^2}\left(\frac{\mathscr{E}^2}{c^2} - p_3^2 - m^2c^2\right) - 2\varepsilon = 2N + 1, \tag{15}$$

ε — непрерывный параметр,

$$C_\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi}{4}\varepsilon}\, \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\varepsilon\right), \quad N = 0, 1, 2, \ldots$$

Волновая функция $\psi_{\mathscr{E}}$ нормирована условием

$$\int \psi_{\mathscr{E}} \psi_{\mathscr{E}}^* d^3x = \delta_{NN'}\, \delta(\varepsilon - \varepsilon')\, \delta(p_3 - p_3'). \tag{16}$$

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании спонтанного и вынужденного излучения в полях квадрупольного типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куканов А. Б., Наумов Н. Д. «Вестн. Моск. ун-та», физ. астрон., 15, № 4, 485, 1974.
2. Куканов А. Б., Наумов Н. Д. Деп. в ВИНИТИ, № 2055—74, 26 июля, 1974.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1973.
4. Багров В. Г., Халилов В. Р. «Изв. вузов», физика, № 2, 37, 1968.
5. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М., 1974.
6. Куканов А. Б., Наумов Н. Д. ЖТФ, № 4, 903, 1975.
7. Куканов А. Б., Наумов Н. Д. «Изв. вузов», физика, № 11, 53, 1974.

Поступила в редакцию 28.3 1975 г.

Кафедра теоретической физики

УДК 539.2.01

Э. В. ГЕВОРКЯН

ВАРИАЦИОННОЕ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ТЕОРИИ КРИСТАЛЛА С МНОГОЧАСТОТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Как известно, потенциальная энергия кристалла из **N**-частиц имеет вид

$$U_N(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N) = \sum_{p=2}^{N} \frac{1}{p!} \sum_{i_1 \neq \ldots \neq i_p}' \Phi_p(\mathbf{x}_{i_1} + \mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{x}_{i_p} + \mathbf{a}_{i_p}), \tag{1}$$

где Φ_p — многочастичные потенциалы, $\mathbf{a}_i$ — координаты узлов кристаллической решетки.