

$$U'' + \left[\frac{1}{(\alpha\hbar)^2} \left(\frac{\alpha^2}{c^2} - p_3^2 - m^2 c^2 \right) - 2\varepsilon - \eta^2 \right] U = 0, \quad (11)$$

$$V'' + (2\varepsilon + \theta^2)V = 0, \quad (12)$$

решения которых имеют вид [7]

$$U_N = \left[N! 2^N \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \right]^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}\eta^2} H_N(\eta), \quad (13)$$

$$V_\varepsilon = C_\varepsilon \left\{ D - \frac{1}{2} + i\varepsilon \right\} [(1-i)\theta] \pm D - \frac{1}{2} + i\varepsilon \left\{ -(1-i)\theta \right\}, \quad (14)$$

а энергия определяется условием

$$\frac{1}{(\alpha\hbar)^2} \left(\frac{\alpha^2}{c^2} - p_3^2 - m^2 c^2 \right) - 2\varepsilon = 2N + 1, \quad (15)$$

ε — непрерывный параметр,

$$C_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\alpha^2}{2} \right)^{1/4} e^{i\frac{\pi}{4}\varepsilon} \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\varepsilon\right), \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

Волновая функция Ψ_ε нормирована условием

$$\int \Psi_\varepsilon^* \Psi_\varepsilon^* d^3x = \delta_{NN'} \delta(\varepsilon - \varepsilon') \delta(p_3 - p_3'). \quad (16)$$

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании спонтанного и вынужденного излучения в полях квадрупольного типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куканов А. Б., Наумов Н. Д. «Вестн. Моск. ун-та», физ. астрон., 15, № 4, 485, 1974.
2. Куканов А. Б., Наумов Н. Д. Деп. в ВИНТИ, № 2055—74, 26 июля, 1974.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля, М., 1973.
4. Багров В. Г., Халилов В. Р. «Изв. вузов», физика, № 2, 37, 1968.
5. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон, М., 1974.
6. Куканов А. Б., Наумов Н. Д. ЖТФ, № 4, 903, 1975.
7. Куканов А. Б., Наумов Н. Д. «Изв. вузов», физика, № 11, 53, 1974.

Поступила в редакцию
28.3.1975 г.

Кафедра
теоретической физики

УДК 539.2.01

Э. В. ГЕВОРКЯН

ВАРИАЦИОННОЕ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ТЕОРИИ КРИСТАЛЛА С МНОГОЧАСТОТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Как известно, потенциальная энергия кристалла из N -частиц имеет вид

$$U_N(x_1, \dots, x_N) = \sum_{p=2}^N \frac{1}{p!} \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_p} \Phi_p(x_{i_1} + a_{i_1}, \dots, x_{i_p} + a_{i_p}), \quad (1)$$

где Φ_p — многочастичные потенциалы, a_i — координаты узлов кристаллической решетки.

Учет многочастичных взаимодействий принципиально важен в теории кристалла. Он позволяет объяснить реальную структуру кристаллов и отклонения от соотношений Коши между упругими постоянными [1, 2]. Многочастичные взаимодействия вносят существенный вклад (порядка 10%) во внутреннюю энергию кристалла [1—3].

В монографии [4] дано физическое обоснование приближения самосогласованного поля и показана его перспективность в теории кристаллического состояния.

В настоящей работе, исходя из вариационного принципа Боголюбова для классических систем [4], получено выражение для свободной энергии кристалла с многочастичным взаимодействием (порядка t) в квазигармоническом приближении самосогласованного поля.

Согласно этому принципу, в частности, имеет место неравенство

$$F \leq F_0 + \left\langle U_N(x_1, \dots, x_N) - \sum_{i=1}^N V(x_i) \right\rangle_0, \quad (2)$$

где F — свободная энергия кристалла, F_0 — свободная энергия системы с потенциальной энергией $\sum_{i=1}^N V(x_i)$, угловые скобки означают усреднение по распределению Больцмана для этой системы.

Изменяя правую часть уравнения (2) по $V(x)$, с учетом симметрии системы, получим вариационное уравнение самосогласованного поля.

$$\left\langle \left\{ \sum_{p=2}^t \frac{1}{(p-1)!} \langle K_p(x_1, x_2, \dots, x_p) \rangle_{x_2, \dots, x_p} - V(x) \right\} (\delta V(x) - \langle \delta V(x) \rangle) \right\rangle = 0, \quad (3)$$

где

$$K_p(x_1, x_2, \dots, x_p) = \sum_{i_2 \neq \dots \neq i_p \neq 1} \Phi_p(x_1 + a_{i_2}, \dots, x_p + a_{i_p})$$

усредняется по всем аргументам, кроме первого, и a_i равно нулю.

Уравнение (3) является наиболее общей формулировкой приближения классического самосогласованного поля. С его помощью ниже получено выражение для свободной энергии кристалла в квазигармоническом приближении, которое в отличие от [5] более полно учитывает ангармонизм всех порядков.

В этом приближении самосогласованный потенциал имеет вид [4]

$$V(x) = V(0) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 F_{\alpha} x_{\alpha}^2. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), находим уравнения для определения параметров F_{α} :

$$\left\langle \left\{ \sum_{p=2}^t \frac{1}{(p-1)!} \langle K_p(x_1, x_2, \dots, x_p) \rangle_{x_2, \dots, x_p} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 F_{\alpha} x_{\alpha}^2 \right\} (x_{\gamma}^2 - \langle x_{\gamma}^2 \rangle) \right\rangle = 0, \quad (5)$$

$$\gamma = 1, 2, 3.$$

Постоянная составляющая самосогласованного потенциала в данном случае остается произвольной, поскольку правая часть неравенства (2) (модельная свободная энергия) от нее не зависит.

Заметим, что для гауссова распределения и произвольной функции $\Phi(x)$ имеет место тождество

$$\langle \Phi(x) (x_{\alpha}^2 - \langle x_{\alpha}^2 \rangle) \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_{\alpha}^2} \right\rangle \langle x_{\alpha}^2 (x_{\alpha}^2 - \langle x_{\alpha}^2 \rangle) \rangle. \quad (6)$$

Используя (6), находим из (5) параметры самосогласованного потенциала

$$F_{\alpha} = \sum_{p=2}^t \frac{1}{(p-1)!} \left\langle \frac{\partial^2 K_p(x_1, x_2, \dots, x_p)}{\partial x_{\alpha}^2} \right\rangle. \quad (7)$$

Подставляя (4) в (2), получим выражение для конфигурационной части свободной энергии кристалла:

$$f = -\beta^{-1} \ln \int e^{-\beta V(x)} d^3x + \sum_{p=2}^t \frac{1}{\rho^l} \langle K_p(x, x_2, \dots, x_p) \rangle - \langle V(x) \rangle = \\ = \frac{1}{2} \beta^{-1} \sum_{\alpha=1}^3 \ln F_{\alpha} + \sum_{p=2}^t \frac{1}{\rho^l} \langle K_p(x, x_2, \dots, x_p) \rangle + \frac{3}{2} \beta^{-1} \ln \left(\frac{\beta}{2\pi e} \right). \quad (8)$$

Выражение (8), несмотря на квадратичную форму самосогласованного потенциала, «в среднем» учитывает ангармонизм всех порядков. Оно определяет термодинамику кристалла с многочастичным взаимодействием в широкой области давлений и температур.

Полученные результаты будут использованы в последующих работах для развития теории полиморфных превращений.

Автор выражает благодарность проф. И. П. Базарову за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lombardi E., Jansen L. «Phys. Rev.», 136, A 1011, 1964; 167, 822, 1968.
2. Базаров И. П., Геворкян Э. В. «Изв. вузов», физика, № 5, 101, 1974.
3. Shell G. G., Zucker I. J. «J. Phys.», C1, 35, 1968.
4. Базаров И. П. Статистическая теория кристаллического состояния. М., 1972.
5. Геворкян Э. В. Деп. в ВИНТИ № 164—74, 29 января 1974.

Поступила в редакцию
7.4 1975 г.

Кафедра
квантовой статистики

УДК 539.1.01

Н. Н. АХМЕДИЕВ

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В ПОЛЕ ДВУХ ПЛОСКИХ НЕКОЛЛИНЕАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Исследованию излучения электрона в поле двух плоских монохроматических электромагнитных волн посвящено ряд работ [1—4]. Однако в них предполагалось, что волновые векторы обеих волн коллинеарны. Это предположение позволяет найти точное релятивистское, как полуклассическое [1—2], так и классическое [3—4], решение задачи без ограничений, налагаемых на интенсивности падающих волн¹. В реальных же экспериментах по рассеянию света электронами параметр интенсивности $q = eE/m\omega c$ обычно мал, и в этом случае можно найти приближенное решение, определяемое начальными членами разложения интенсивности рассеянного света по параметру q . Тогда при нахождении интенсивности излучения суммарных и разностных частот необходимо учитывать не только нелинейный характер движения электрона в поле монохроматической волны, но также и нелинейность процесса излучения электроном света.

Последний эффект дает квадрупольный и магнитно-дипольный вклады в излучение гармоник и суммарной и разностной частот. Поскольку оба типа нелинейности квадратичны по параметру q , то они дают сравнимые вклады в величину интенсивности и пренебречь квадрупольным и магнитно-дипольным излучениями в данном случае нельзя.

Изложенный метод решения позволяет найти интенсивность излучения комбинационных частот при произвольных направлениях распространения волн, а также при произвольной их поляризации. В данной работе для простоты рассмотрен случай двух линейно-поляризованных волн, распространяющихся под углом 2χ друг к другу и

¹ Точное решение уравнения движения электрона в поле неколлинеарных электромагнитных волн наталкивается на определенные трудности [5—6].