Подставляя (4) в (2), получим выражение для конфигурационной части свободной энергии кристалла:

$$f = -\beta^{-1} \ln \int e^{-\beta V(\mathbf{x})} d^3x + \sum_{p=2}^{t} \frac{1}{p!} \langle K_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p) \rangle - \langle V(\mathbf{x}) \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \beta^{-1} \sum_{\alpha=1}^{3} \ln F_\alpha + \sum_{p=2}^{t} \frac{1}{p!} \langle K_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p) \rangle + \frac{3}{2} \beta^{-1} \ln \left(\frac{\beta}{2\pi e} \right). \quad (8)$$

Выражение (8), несмотря на квадратичную форму самосогласованного потенциала, «в среднем» учитывает ангармонизм всех порядков. Оно определяет термодинамику кристалла с многочастичным взаимодействием в широкой области давлений и температур.

Полученные результаты будут использованы в последующих работах для развития теории полиморфных превращений.

Автор выражает благодарность проф. И. П. Базарову за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lombardi E., Jansen L. «Phys. Rev.», **136**, A 1011, 1964; **167**, 822, 1968.
2. Базаров И. П., Геворкян Э. В. «Изв. вузов», физика, № 5, 101, 1974.
3. Chell G. G., Zucker I. J. «J. Phys.», **C1**, 35, 1968.
4. Базаров И. П. Статистическая теория кристаллического состояния. М., 1972.
5. Геворкян Э. В. Деп. в ВИНИТИ № 164—74, 29 января 1974.

Поступила в редакцию
7.4 1975 г.

Кафедра
квантовой статистики

УДК 539.1.01

Н. Н. АХМЕДИЕВ

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В ПОЛЕ ДВУХ ПЛОСКИХ НЕКОЛЛИНЕАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Исследованию излучения электрона в поле двух плоских монохроматических электромагнитных волн посвящено ряд работ [1—4]. Однако в них предполагалось, что волновые векторы обеих волн коллинеарны. Это предположение позволяет найти точное релятивистское, как полуклассическое [1—2], так и классическое [3—4], решение задачи без ограничений, налагаемых на интенсивности падающих волн[1]. В реальных же экспериментах по рассеянию света электронами параметр интенсивности $q=eE/m\omega c$ обычно мал, и в этом случае можно найти приближенное решение, определяемое начальными членами разложения интенсивности рассеянного света по параметру q. Тогда при нахождении интенсивности излучения суммарных и разностных частот необходимо учитывать не только нелинейный характер движения электрона в поле монохроматической волны, но также и нелинейность процесса излучения электроном света.

Последний эффект дает квадрупольный и магнитно-дипольный вклады в излучение гармоник и суммарной и разностной частот. Поскольку оба типа нелинейности квадратичны по параметру q, то они дают сравнимые вклады в величину интенсивности и пренебречь квадрупольным и магнитно-дипольным излучениями в данном случае нельзя.

Изложенный метод решения позволяет найти интенсивность излучения комбинационных частот при произвольных направлениях распространения волн, а также при произвольной их поляризации. В данной работе для простоты рассмотрен случай двух линейно-поляризованных волн, распространяющихся под углом 2χ друг к другу и

[1] Точное решение уравнения движения электрона в поле неколлинеарных электромагнитных волн наталкивается на определенные трудности [5—6].

поляризованных так, что их электрические векторы лежат в плоскости волновых векторов волн.

Рассмотрим две плоские электромагнитные волны, распространяющиеся в плоскости XY декартовой системы координат, каждая под углом χ к оси X. Пусть электрический вектор волн задан следующими формулами:

$$
\begin{aligned}
E_x &= [-E_1 \cos\alpha + E_2 \cos\beta] \sin\chi, \\
E_y &= [E_1 \cos\alpha + E_2 \cos\beta] \cos\chi,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \omega_1 (t - x/c \cos\chi - y/c \sin\chi), \\
\beta &= \omega_2 (t - x/c \cos\chi + y/c \sin\chi) + \eta,
\end{aligned}
$$

E_1 и E_2 — амплитуды волн, ω_1 и ω_2 — их частоты. Тогда решение уравнения движения электрона

$$
m\dot{\mathbf{V}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{VH}] \tag{2}
$$

можно искать методом последовательных приближений [7]. Так же, как и в [4], будем искать решение в системе отсчета, в которой электрон в среднем покоится. Кроме того, начальные координаты электрона в уравнении движения положим равными нулю, так как в волновой зоне сдвиг начальных координат приведет лишь к сдвигу фазы излучаемых волн. В первом порядке решение (2) будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
x^{(1)} &= \frac{e}{m}\left(\frac{E_1}{\omega_1^2}\cos\alpha - \frac{E_2}{\omega_2^2}\cos\beta\right)\sin\chi, \\
y^{(1)} &= \frac{e}{m}\left(-\frac{E_1}{\omega_1^2}\cos\alpha - \frac{E_2}{\omega_2^2}\cos\beta\right)\cos\chi,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где e и m — заряд и масса электрона.

Квадратичные по q поправки к уравнениям движения появляются за счет слагаемого $\frac{e}{c}[\mathbf{VH}]$ в (2), а также из-за слабой неоднородности электрического поля, которое можно учесть, разлагая $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ в ряд Тэйлора и оставляя лишь квадратичные члены типа $(\mathbf{r}\nabla)\mathbf{E}$. Проведя несложные выкладки, видим, что смещение электрона, меняющееся с частотами $\omega_+ = \omega_1 + \omega_2$ и $\omega_- = \omega_1 - \omega_2$, имеет вид

$$
\begin{aligned}
x^{(2)} &= \frac{e^2}{2m^2c}\,\frac{E_1E_2}{\omega_1\omega_2}\left\{-\frac{2(\omega_1^3 \pm \omega_2^3)}{\omega_1\omega_2\omega_\pm^2}\sin^2\chi \mp \frac{1}{\omega_\pm}\right\}\cos\chi\sin(\alpha \pm \beta), \\
y^{(2)} &= \frac{e^2}{2m^2c}\,\frac{E_1E_2}{\omega_1\omega_2}\left\{\frac{2(\omega_1^3 \pm \omega_2^3)}{\omega_1\omega_2\omega_\pm^2}\cos^2\chi \mp \frac{\omega_\mp}{\omega_\pm^2}\right\}\sin\chi\sin(\alpha \pm \beta).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Зная уравнения движения (3) и (4), легко найти электрический дипольный $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, магнитный дипольный $\mathbf{m} = \frac{e}{2c}[\mathbf{r}\mathbf{v}]$ моменты и тензор квадрупольного $D_{\alpha\beta} = e\,(3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} r^2)$ момента электрона.

Отметим, что в статическом случае введение мультипольных моментов для одного электрона было бы бессмысленным, так как скалярный потенциал, создаваемый одним электроном, определяется точно. Для колеблющегося же электрона вместо нахождения точной величины векторного потенциала в волновой зоне можно искать его в виде разложения по степеням $a/\lambda \sim q$, где a — размер той области пространства, которую занимает электрон при своем движении. В этом случае мультипольные моменты вводятся именно для этой области. Поскольку нас интересует только излучение на суммарной и разностной частотах, то во всех моментах необходимо оставить только слагаемые, меняющиеся с частотами ω_+ и ω_-.

Для нахождения мощности излучения необходимо знать компоненты магнитного поля, поперечные направлению излучения

$$
H_\varphi = \frac{1}{c^2R_0}\left\{(\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}_\theta) + \frac{1}{6c}(\dddot{\mathbf{D}}\mathbf{n}_\theta) - (\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}_\varphi)\right\},
$$

$$H_\theta = -\frac{1}{c^2R_0}\left\{(\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}_\varphi) + \frac{1}{6c}(\dddot{\mathbf{D}}\mathbf{n}_\varphi) + (\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}_\theta)\right\}, \tag{5}$$

где $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}_\varphi$, $\mathbf{n}_\theta$ — единичные базисные векторы сферической системы координат, в которой направление вектора $\mathbf{n}$ совпадает с направлением излучения, а компоненты вектора $\mathbf{D}$ равны $D_i = D_{ij}n_j$.

Подставив значения всех моментов в (5), найдем амплитуды полей, а затем угловое распределение мощности излучения суммарной и разностной частот

$$\frac{dP_\pm}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi}(H_\varphi^2 + H_\theta^2)R_0^2 = \frac{e^2\omega_\pm^4}{2\pi c}\left(\frac{q_1q_2}{4\omega_1\omega_2}\right)^2 \times$$

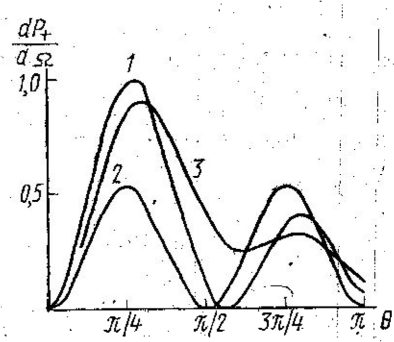
$$\times\left\{\left[\omega_\pm\cos^2\chi\sin\theta\cos\varphi + \omega_\mp\sin\chi\cos\chi\cos\theta + \right.\right.$$

$$\left. + (2(\omega_1^2+\omega_2^2)\cos^2\chi \pm \omega_1\omega_2(1+2\cos^2\chi))\frac{\omega_\mp}{\omega_\pm^2}\sin\chi\right]^2\sin^2\varphi +$$

$$+\left[\omega_\pm(1-\cos^2\chi\sin^2\varphi)\sin\theta\cos\theta - \omega_\mp\sin\chi\cos\chi\cos\varphi + \right.$$

$$+ (2(\omega_1^2+\omega_2^2)\sin^2\chi \pm \omega_1\omega_2(1+2\sin^2\chi))\frac{1}{\omega_\pm}\sin\theta\cos\chi +$$

$$\left.\left. + (2(\omega_1^2+\omega_2^2)\cos^2\chi \pm \omega_1\omega_2(1+2\cos^2\chi))\frac{\omega_\mp}{\omega_\pm^2}\cos\theta\cos\varphi\sin\chi\right]^2\right\}, \tag{6}$$



Распределение мощности излучения суммарной частоты по углу θ при $\omega_1 = 1{,}5\ \omega_2$; $\varphi = 0$, $\chi = \pi/8$ (*1*), $\chi = \pi/2$ (*2*), $\varphi = \pi/4$, $\chi = \pi/4$ (*3*). Масштаб для мощности выбран произвольно

где q_1 и q_2 — параметры интенсивности первой и второй волн, верхний знак относится к излучению суммарной, а нижний—к излучению разностной частот. При $\chi = 0$ мы получим излучение электрона в поле коллинеарных волн, и тогда (6) совпадает с формулой (13) в [4], если в ней положить $\psi = 0$.

На рисунке показано угловое распределение мощности излучения суммарной частоты для нескольких значений угла χ между волнами. Как видим, угловое распределение мощности не обладает симметрией относительно плоскости YZ, хотя для каждого из у и н х из уч н в ь я симметрия ыла ы. Отсутствие указанной симметрии для суммарного излучения связано с различием фазовых соотношений излучения различной мультипольности в разных октантах.

Полную мощность излучения можно получить из (6), проинтегрировав по телесному углу 4π. Тогда

$$P_\pm(\chi) = P_d + P_Q + P_m, \tag{7}$$

где P_d, P_Q и P_m представляют собой мощности дипольного, квадрупольного и магнитно-дипольного излучений:

$$P_d = \frac{4}{3}\frac{e^2\omega_\pm^4}{c}\left(\frac{q_1q_2}{4\omega_1\omega_2}\right)^2\left\{[2(\omega_1^3 \pm \omega_2^3)\sin^2\chi \pm \omega_\pm\omega_1\omega_2]^2 \times\right.$$

$$\left.\times\frac{\cos^2\chi}{\omega_\pm^4} + [2(\omega_1^3 \mp \omega_2^3)\cos^2\chi \pm \omega_\mp\omega_1\omega_2]^2\cdot\frac{\sin^2\chi}{\omega_\pm^4}\right\},$$

$$P_Q = \frac{4}{3}\frac{e^2\omega_\pm^4}{c}\left(\frac{q_1q_2}{4\omega_1\omega_2}\right)^2\frac{\omega_\pm^2}{5}(1-\sin^2\chi\cos^2\chi),$$

$$P_m = \frac{4}{3}\,\frac{e^2\omega_{\pm}^4}{c}\left(\frac{q_1q_2}{4\omega_1\omega_2}\right)^2\omega_{\mp}^2\sin^2\chi\cos^2\chi. \quad (8)$$

Таким образом, полное излучение равно сумме трех видов излучения в соответствии с тем утверждением, что дипольное, квадрупольное и магнитно-дипольное излучения дают независимые вклады в полное излучение.

В заключение отметим, что мультипольное излучение необходимо учитывать также и в процессах рассеяния света в плазме, в частности в задаче по нелинейному отражению света от границы плазмы [8].

Автор признателен Д. Н. Клышко за обсуждение результатов настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский В. Ч., Херрманн И. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 11, № 6, 671, 1970.
2. Лебедев И. В. «Оптика и спектроскопия», 29, 948, 1970.
3. Халилов В. Р. «Изв. вузов», физика, № 8, 76, 1972.
4. Ахмедиев Н. Н. «Квантовая электроника», 1, 2030, 1974.
5. Багров В. Г., Гитман Д. М., Задорожный В. Н., Шварцман Ш. М. «Изв. вузов», физика, № 1, 42, 1975.
6. Sen Gupta N. D. «Z. Phys.», 200, 13, 1967.
7. Бломберген Н. Нелинейная оптика. М., 1966.
8. Bloembergen N., Shen Y. R. «Phys. Rev.», 141, 298, 1966.

Поступила в редакцию
7.4 1975 г.

Кафедра
волновых процессов

УДК 523.11

З. А. ШТЕЙНГРАД

К ВОПРОСУ О СВЯЗИ МЕЖДУ КООРДИНАТНЫМИ УСЛОВИЯМИ И ФОРМАЛИЗМОМ КИНЕМЕТРИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ

Согласно теореме Римана [1], четыре компонента метрического тензора $g_{\mu\nu}$ могут быть записаны в наперед заданном виде. Это позволяет наложить $g_{\mu\nu}$ четыре так называемых координатных условия. Ранее было показано [2, 3], что координатные условия могут, вообще говоря, выделять классы систем отсчета, при изучении которых целесообразно пользоваться формализмом хронометрических инвариантов (х. и.) [4]. Однако независимых условий, выделяющих некоторый класс отсчета и не накладывающих ограничений на метрику, может быть только три, в то время как координатных условий четыре. Это, очевидно, означает, что координатные условия помимо ограничений, накладываемых на выбор класса систем отсчета, могут ограничивать еще и выбор классов пространственных сечений, рассматриваемых в рамках аппарата кинеметрических инвариантов (к. и.) [5].

Определение. Пусть заданы некоторые координатные условия. Тогда рассматриваемое пространство сечений будем называть соответствующим этим координатным условиям в том и только том случае, если среди множества систем координат допустимых в нем найдется хотя бы одна, для которой заданные координатные условия удовлетворяются.

В силу того что внутри пространства сечений допустимы только преобразования координат вида

$$x^0 = x'^0(x^0); \quad (1)$$

$$x'^i = x'^i(x^\alpha), \quad (2)$$

которые не выводят за пределы этого пространства ясно, что не всякое пространство сечений будет соответствовать наперед заданным координатным условиям (латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, а греческие 0, 1, 2, 3).