ЛИТЕРАТУРА

1. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. М., 1966.
2. Штейнград З. А. Тезисы докладов III Советской гравитационной конференции. Ереван, 1972.
3. Штейнград З. А. ДАН СССР, 204, № 4, 831, 1972.
4. Зельманов А. Л. «Труды VI совещания по вопросам космогонии». М., 1959, стр. 144.
5. Зельманов А. Л. ДАН СССР, 209, № 4, 822, 1973.
6. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., 1961.
7. Рашевский П. К. Геометрическая теория дифференциальных уравнений с частными производными. М., 1947.
8. Инфельд Л., Плебанский Е. Движение и релятивизм. М., 1962.

Поступила в редакцию
16.6 1975 г.

Кафедра
астрофизики

УДК 530.145

А. М. ВОЛОЩЕНКО, Ю. Г. ПАВЛЕНКО

О ВЛИЯНИИ ВНЕШНЕГО ПОЛЯ НА СПЕКТР МЯГКИХ ФОТОНОВ

В связи с появившимися экспериментальными возможностями [1] проверки квантовой теории синхротронного излучения [2], а также астрофизическими приложениями усилился интерес к квантовым процессам во внешнем поле с участием релятивистских электронов. Ввиду сложной структуры функции Грина во внешнем поле расчет эффектов второго и более высоких порядков связан со значительными вычислительными трудностями. В данной заметке указывается на возможность расчета мягкофотонной области спектра для радиационных процессов во внешнем поле с использованием известного приближения [3].

Рассмотрим в представлении Фарри наряду с некоторым основным процессом во внешнем поле с вероятностью dw_0 (сечением $d\sigma_0$) процесс, отличающийся от первого испусканием n дополнительных фотонов. Пусть начальное и конечное состояния электрона квазиклассичны и можно пренебречь отдачей при излучении дополнительных фотонов. Тогда ток в вершинах, соответствующих испусканию мягких фотонов, можно считать c-числом и вынести из-под знака T произведения (приближение классических токов [4]). Вероятность процесса в этом приближении факторизуется:

$$dw = dw_0 \prod_{i=1}^{n} dw_i, \tag{1}$$

$$dw_i = \frac{1}{4\pi^2\omega_i} \left| \int (j(x)\, e_i^*)\, e^{ik_i x}\, d^4x \right|^2 d\mathbf{k}_i. \tag{2}$$

Здесь $k_i^\mu = (\omega_i,\ \mathbf{k}_i)$ и e_i^μ — волновой вектор и вектор поляризации i-того фотона $\hbar = c = 1$).

Для релятивистских электронов в случае, когда угол отклонения в поле для начального и конечного электрона много больше соответственно m/ε_1 и m/ε_2 (ε_1 и ε_2 — начальная и конечная энергия электрона в основном процессе), а также если внешнее (для определенности, магнитное) поле не является сильно неоднородным, траекторию на длине когерентности излучения мягких фотонов можно аппроксимировать двумя составленными дугами окружностей:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} R_1 [\sin\Omega_1 t\, \mathbf{n}_x + (1-\cos\Omega_1 t)\, \mathbf{n}_y] + v_{1z} t\, \mathbf{n}_z, & t<0 \\ R_2 [(-\sin\delta + \sin(\Omega_2 t+\delta))\, \mathbf{n}_x + (\cos\delta - \\ \quad -\cos(\Omega_2 t+\delta))\, \mathbf{n}_y] + v_{2z} t\, \mathbf{n}_z, & t>0, \end{cases} \tag{3}$$

$$\mathbf{H} = (0,\ 0,\ H), \quad \Omega_{1,2} = \frac{e_0 H}{\varepsilon_{1,2}}, \quad R_{1,2} = \frac{v_{1,2\perp}}{\Omega_{1,2}}.$$

Здесь $-e_0<0$ — заряд электрона, δ — угол, на который изменяется направление $\mathbf{v}_\perp$ в момент $t=0$. Найдем выражение для мгновенного спектра [5, 6] энергии излучения $d\mathscr{E}(\mathbf{n}, \omega)$ при движении по траектории (3), формирующегося в моменты времени t, близкие к $t=0$. Волновой вектор $\mathbf{k}=\omega\mathbf{n}$ и векторы π и σ компонентов линейной поляризации излучения зададим в виде [2]

$$\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}(\theta, \varphi) = \omega(\sin\theta\cos\varphi\mathbf{n}_x + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{n}_y + \cos\theta\mathbf{n}_z),$$

$$\mathbf{e}_\pi = \cos\theta\cos\varphi\mathbf{n}_x + \cos\theta\sin\varphi\mathbf{n}_y - \sin\theta\mathbf{n}_z,$$

$$\mathbf{e}_\sigma = \sin\varphi\mathbf{n}_x - \cos\varphi\mathbf{n}_y.$$

Проводя в (2) ультрарелятивистские разложения (аналогично [6]), получим

$$\frac{d\mathscr{E}_\pi(\mathbf{n}, \omega)}{do_\mathbf{n} d\omega} = \frac{4e_0^2}{\pi}\left|\tau_1\left(\frac{\varepsilon_1}{m}\right)\left(\frac{\omega}{2\omega_1^c}\right)^{2/3} e^{-i\Phi_1} g(z_1, \xi_1) + \right.$$

$$\left. + \tau_2\left(\frac{\varepsilon_2}{m}\right)\left(\frac{\omega}{2\omega_2^c}\right)^{2/3} e^{-i\Phi_2} f(z_2, \xi_2)\right|^2,$$

$$\frac{d\mathscr{E}_\sigma(\mathbf{n}, \omega)}{do_\mathbf{n} d\omega} = \frac{4e_0^2}{\pi}\left|\left(\frac{\varepsilon_1}{m}\right)\left(\frac{\omega}{2\omega_1^c}\right)^{1/3} e^{-i\Phi_1} g'_{z_1}(z_1, \xi_1) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\varepsilon_2}{m}\right)\left(\frac{\omega}{2\omega_2^c}\right)^{1/3} e^{-i\Phi_2} f'_{z_2}(z_2, \xi_2)\right|^2, \tag{4}$$

$$z_j = \left(\frac{\omega}{2\omega_j^c}\right)^{2/3}(1+\tau_j^2), \quad \omega_j^c = \Omega_j\left(\frac{p_{j\perp}}{m}\right)\left(\frac{\varepsilon_j}{m}\right)^2, \quad j=1,\ 2;$$

$$\tau_j = \left(\frac{p_{j\perp}}{m}\right)\psi'_j, \quad \sin\psi'_j = \frac{\sin\psi - v_{jz}}{1 - v_{jz}\sin\psi}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

$$\xi_1 = -\varphi\left(\frac{p_{1\perp}}{m}\right)\left(\frac{\omega}{2\omega_1^c}\right)^{1/3}, \quad \xi_2 = -(\varphi-\delta)\left(\frac{p_{2\perp}}{m}\right)\left(\frac{\omega}{2\omega_2^c}\right)^{1/3},$$

$$\Phi_j = \left(z_j\xi_j + \frac{\xi_j^3}{3}\right);$$

$$\frac{m}{p_{j\perp}}, \quad \psi'_j, \quad \varphi, \quad \delta \ll 1, \qquad \frac{\Omega_j}{v_{j\perp}^2} \ll \omega \ll \omega_b. \tag{5}$$

В выражении (4) функции $g(z, \xi)$ и $f(z, \xi)$ есть неполные интегралы Эйри:

$$g(z, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\xi} e^{i\left(zx + \frac{x^3}{3}\right)} dx, \qquad f(z, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\xi}^{+\infty} e^{i\left(zx + \frac{x^3}{3}\right)} dx,$$

$$f(z, \xi) + g(z, \xi) = \Phi(z), \qquad f(z, \xi) = \Phi(z) - f^*(z, -\xi). \tag{6}$$

При $z,\ \xi > 0: f(z, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{i\left(z\xi + \frac{1}{3}\xi^3\right)}\left(\frac{i}{z+\xi^2} + \frac{2\xi}{(z+\xi^2)^3} + \ldots\right).$

Здесь $\Phi(z)$ — функции Эйри. Процесс излучения мягких фотонов квазиклассический. Поэтому вероятность излучения фотона в интервал $dO_n d\omega$ вблизи направления $\mathbf{n}$ и частоты ω связана с энергией излучения соотношением

$$dw_{\pi,\sigma}(\mathbf{n}, \omega) = d\mathscr{E}_{\pi,\sigma}(\mathbf{n}, \omega)/\omega. \tag{7}$$

Применимость теории возмущений предполагает [7, 8], что рассматривается излучение с участка квазиклассической траектории, меньшего длины свободного пробега электрона в магнитом поле: $l_{\text{проб.}}=137\ m/e_0Hv_\perp$. Это ограничивает применимость соотношений (1), (2), (7) достаточно малыми углами φ, удовлетворяющими соотношению: $|\varphi|\ll 137\ m/p_\perp$ (при $p_{1\perp}\sim p_{2\perp}$). Значение частоты ω_b в (5) выбирается из условия малости обратного влияния на основной процесс излучения дополнительных фотонов ω_i. Для частот $\omega\gg\omega_{1,2}^c$ влияние магнитного поля на излучение не существенно (формирование этой части спектра происходят на малом участке траектории, на котором дуги окружностей можно аппроксимировать двумя составленными прямыми) и (4) переходит в соответствующее выражение для спектра мягких фотонов в отсутствие поля. При $\omega\ll\ \omega_{1,2}^c$ спектр излучения спадает по степенному закону.

Стандартными применениями (1)—(4) являются излучение мягких фотонов при упругих столкновениях ($\varepsilon_1=\varepsilon_2$) и β-распаде ($v_1=0,\ \delta=0$). Кроме того, во внешнем поле основным процессом в (1) может быть процесс излучения жесткого фотона ω_0, область формирования которого значительно меньше области формирования мягких фотонов ω_i ($\delta=0,\ \varepsilon_2=\varepsilon_1-\omega_0,\ p_{2z}\simeq p_{1z};\ \Sigma\omega_i\ll\varepsilon_2,\ \omega_0$). Отметим также, что выражения (3), (4) при $\Omega_1\to 0,\ \delta=0,\ \mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2$ описывают излучение электрона при наличии резкой границы магнитного поля: $\mathbf{H}=0$ при $x<0$, $\mathbf{H}=(0,\ 0,\ H)$ при $x>0$. При этом $\omega_b\sim\varepsilon_2/m^2l_{\text{неодн}}$, где $l_{\text{неодн}}$ — ширина слоя, на котором поле претерпевает скачок. Характерный размер $l'_{\text{неодн}}$ такой ширины, при которой $\omega_b\sim\omega_c$ ($v_z=0$), не зависит от энергии электрона и равен 10^3 см/ H(э).

В заключение авторы выражают признательность проф. А. А. Соколову за стимулирующий интерес к работе и благодарят В. Ч. Жуковского за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Erber T. «Acta Phys. Austr. Suppl.», 8, 323, 1971.
2. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М., 1974.
3. Bloch F., Nordsieck A. «Phys. Rev.», 52, 54, 1937.
4. Glauber R. «Phys. Rev.», 84, 395, 1951.
5. Schwinger T. J. «Phys. Rev.», 75, 1912, 1949.
6. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М., 1965.
7. Ritus V. I. «Nucl. Phys.», **B 44**, 236, 1972.
8. Morozov D. A., Ritus V. I. «Nucl. Phys.», **B86**, 309, 1975.
9. Волощенко А. М., Павленко Ю. Г. «Изв. вузов», физика, № 3, 1976.

Поступила в редакцию
1.10 1975 г.

Кафедра
теоретической физики

УДК 539.182

Г. Я. КОРЕНМАН

О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ ВОДОРОДОПОДОБНЫМИ ВОЛНОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ В СФЕРИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Хорошо известно [1], что уравнение Шредингера для водородоподобной системы можно решить как в сферических ($r,\ \vartheta,\ \varphi$), так и в параболических координатах ($\xi=r+z,\ \eta=r-z,\ \varphi$). Для описания связанных состояний такой системы обычно используются волновые функции

$$\psi_{nlm}(r,\ \vartheta,\ \varphi)=R_{nl}(r)\,Y_{lm}(\vartheta,\ \varphi), \tag{1}$$

отвечающие разделению переменных в сферических координатах.

Однако при рассмотрении многих задач атомной физики (эффект Штарка, комптон-эффект на связанном электроне, ионизация атома быстрой заряженной частицей, нейтрализация положительного иона и т. п.) удобно использовать функции

$$\psi_{n_1n_2m}(\xi,\ \eta,\ \varphi)=\frac{\sqrt{2}}{n^2}f_{n_1m}(\xi/n)\,f_{n_2m}(\eta/n)\,\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \tag{2}$$