электрона в магнитом поле: $l_{\text{проб.}}=137\ m/e_0Hv_\perp$. Это ограничивает применимость соотношений (1), (2), (7) достаточно малыми углами $\varphi$, удовлетворяющими соотношению: $|\varphi| \ll 137\ m/p_\perp$ (при $p_{1\perp} \sim p_{2\perp}$). Значение частоты $\omega_b$ в (5) выбирается из условия малости обратного влияния на основной процесс излучения дополнительных фотонов $\omega_i$. Для частот $\omega \gg \omega^c_{1,2}$ влияние магнитного поля на излучение не существенно (формирование этой части спектра происходят на малом участке траектории, на котором дуги окружностей можно аппроксимировать двумя составленными прямыми) и (4) переходит в соответствующее выражение для спектра мягких фотонов в отсутствие поля. При $\omega \ll \omega^c_{1,2}$ спектр излучения спадает по степенному закону.

Стандартными применениями (1)—(4) являются излучение мягких фотонов при упругих столкновениях ($\varepsilon_1=\varepsilon_2$) и $\beta$-распаде ($v_1=0$, $\delta=0$). Кроме того, во внешнем поле основным процессом в (1) может быть процесс излучения жесткого фотона $\omega_0$, область формирования которого значительно меньше области формирования мягких фотонов $\omega_i$ ($\delta=0$, $\varepsilon_2=\varepsilon_1-\omega_0$, $p_{2z} \simeq p_{1z}$; $\Sigma\omega_i \ll \varepsilon_2, \omega_0$). Отметим также, что выражения (3), (4) при $\Omega_1 \to 0$, $\delta=0$, $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2$ описывают излучение электрона при наличии резкой границы магнитного поля: $\mathbf{H}=0$ при $x<0$, $\mathbf{H}=(0, 0, H)$ при $x>0$. При этом $\omega_b \sim \varepsilon_2/m^2 l_{\text{неодн.}}$, где $l_{\text{неодн}}$ — ширина слоя, на котором поле претерпевает скачок. Характерный размер $l'_{\text{неодн}}$ такой ширины, при которой $\omega_b \sim \omega_c$ ($v_z=0$), не зависит от энергии электрона и равен $10^3$ см/ $H$(э).

В заключение авторы выражают признательность проф. А. А. Соколову за стимулирующий интерес к работе и благодарят В. Ч. Жуковского за полезное обсуждение.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Erber T. «Acta Phys. Austr. Suppl.», 8, 323, 1971.
2. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М., 1974.
3. Bloch F., Nordsieck A. «Phys. Rev.», 52, 54, 1937.
4. Glauber R. «Phys. Rev.», 84, 395, 1951.
5. Schwinger T. J. «Phys. Rev.», 75, 1912, 1949.
6. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М., 1965.
7. Ritus V. I. «Nucl. Phys.», B 44, 236, 1972.
8. Morozov D. A., Ritus V. I. «Nucl. Phys.», B86, 309, 1975.
9. Волощенко А. М., Павленко Ю. Г. «Изв. вузов», физика, № 3, 1976.

Поступила в редакцию.
1.10 1975 г.

Кафедра
теоретической физики

УДК 539.182

Г. Я. КОРЕНМАН

# О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ ВОДОРОДОПОДОБНЫМИ ВОЛНОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ В СФЕРИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Хорошо известно [1], что уравнение Шредингера для водородоподобной системы можно решить как в сферических ($r$, $\vartheta$, $\varphi$), так и в параболических координатах ($\xi=r+z$, $\eta=r-z$, $\varphi$). Для описания связанных состояний такой системы обычно используются волновые функции

$$\psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) = R_{nl}(r)\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \tag{1}$$

отвечающие разделению переменных в сферических координатах.

Однако при рассмотрении многих задач атомной физики (эффект Штарка, комптон-эффект на связанном электроне, ионизация атома быстрой заряженной частицей, нейтрализация положительного иона и т. п.) удобно использовать функции

$$\psi_{n_1 n_2 m}(\xi, \eta, \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{n^2} f_{n_1 m}(\xi/n)\, f_{n_2 m}(\eta/n) \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \tag{2}$$

получающиеся при разделении переменных в параболических координатах. В связи с этим важно знать коэффициенты разложения состояний (1) по функциям (2). Для отдельных значений $n$, $l$, $m$ коэффициенты разложения были вычислены [2] еще в первые годы после создания квантовой механики.

В некоторых современных задачах, встречающихся, в частности, при рассмотрении мезоатомных процессов и элементарных процессов в плазме, приходится иметь дело с большим числом высоковозбужденных состояний водородоподобной системы. Для таких случаев полезно иметь коэффициенты разложения одних состояний по другим в общем виде. Используя симметрию 0(4) для атома водорода, Д. Парк [3] показал (см. также [1 и 4]), что переход от одного набора векторов состояний к другому осуществляется с помощью обычных коэффициентов Клебша — Гордана

$$\Phi_{nlm} = \sum_{k_1+k_2=m} \langle kk_1kk_2 \mid lm\rangle \, \Phi_{kk_1k_2}, \tag{3}$$

где квантовые числа $k$, $k_1$, $k_2$ однозначно связаны с $n_1$, $n_2$, $m$:

$$\begin{aligned} k &= (n_1 + n_2 + |m|)/2 = (n-1)/2, \\ k_1 &= (m + n_1 - n_2)/2, \\ k_2 &= (m - n_1 + n_2)/2. \end{aligned} \tag{4}$$

Однако разложение (3) еще не решает полностью вопроса о соотношении между волновыми функциями (1) и (2), поскольку векторы состояний $\Phi_{nlm}$ и $\Phi_{kk_1k_2}$, введенные при теоретико-групповом рассмотрении, могут отличаться от соответствующих функций (1) и (2) фазовыми множителями, зависящими от квантовых чисел. Для практического использования соотношения (3) необходимо найти эти фазовые множители, в чем и состоит настоящая заметка.

Пусть векторы состояний $\Phi_{nlm}$ и $\Phi_{kk_1k_2}$ в координатном представлении связаны с функциями (1) и (2) посредством соотношений

$$\Phi_{nlm}(\mathbf{r}) = \exp[i\alpha(n, l, m)]\, \psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi), \tag{5}$$

$$\Phi_{kk_1k_2}(\mathbf{r}) = \exp[i\beta(k, k_1, k_2)]\, \psi_{n_1n_2m}(\xi, \vartheta, \varphi). \tag{6}$$

Будем считать, что входящие в (1) и (2) функции $R_{nl}(r)$ и $f_{pm}(\rho)$ определены так же, как в [1], а фазы сферических функций $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ выбраны согласно [5].

Подставим (5) и (6) в (3) и разделим на $\exp[i(\alpha+m\varphi)]$. Тогда в силу указанного определения волновых функций $\psi_{nlm}$ и $\psi_{n_1n_2m}$ левая часть равенства оказывается вещественной, а в его правой части не содержится других комплексных величин, кроме относительного фазового множителя $e^{i(\beta-\alpha)}$. Поэтому можно положить

$$e^{i(\beta-\alpha)} = (-1)^N, \tag{7}$$

где

$$N = A(k-k_1) + B + C\cdot 2k + D\cdot l + E\cdot m, \tag{8}$$

причем $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ — постоянные целые числа, равные нулю или единице.

Рассмотрим преобразование правой части равенства

$$\psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{k_1+k_2=m} \langle kk_1kk_2 \mid lm\rangle (-1)^{N(k_1)} \psi_{n_1n_2m}(\xi, \eta, \varphi) \tag{9}$$

при пространственных отражениях. Замена $\mathbf{r}\to-\mathbf{r}$ соответствует преобразованию параболических координат $\xi\to\eta$, $\eta\to\xi$, $\varphi\to\pi+\varphi$, так что

$$\psi_{n_1n_2m}(\xi, \eta, \varphi) \to (-1)^m \psi_{n_2n_1m}(\xi, \eta, \varphi).$$

Чтобы свести преобразованную правую часть равенства (9) к исходному выражению, переобозначим индексы суммирования $(k_1 \rightleftarrows k_2)$ или в других обозначениях $(n_1 \rightleftarrows n_2)$ и воспользуемся соотношением симметрии для коэффициентов Клебша — Гордана:

$$\langle kk_1kk_2 \mid lm\rangle = (-1)^{l-2k} \langle kk_2kk_1 \mid lm\rangle. \tag{10}$$

Замечая, что

$$(-1)^{N(k_2)+m+l-2k} = (-1)^{N(k_1)} (-1)^{l+(A-1)(2k-m)}, \tag{11}$$

получим, что при замене $\mathbf{r}\to-\mathbf{r}$ правая часть (9) сводится к исходному выражению, умноженному на $(-1)^{l+(A-1)(2k+m)}$. Поскольку при всех значениях $k$ и $m$ четность волновой функции (9) должна быть равна $(-1)^l$, следует положить $A=1$.

Значения других параметров в (8) не влияют на четность состояния. Однако их важно учитывать в тех случаях, когда волновая функция системы представлена в виде некоторой суперпозиции состояний $\varphi_{nlm}$, как, например, в задаче об атоме в поле кристаллической решетки. Проще всего найти оставшиеся параметры $B$, $C$, $D$, $E$, рассматривая соотношение (9) при определенных значениях $n$, $l$, $m$. Полагая набор квантовых чисел $(n, l, m)$ равным поочередно (1, 0, 0), (2, 0, 0), (2, 1, 0), (2, 1, 1) и используя явный вид волновых функций $\psi_{nlm}(\mathbf{r})$ и $\psi_{n_1 n_2 m}(\mathbf{r})$, найдем $B=0$, $C=0$, $D=1$, $E=0$.

Таким образом, окончательно можно записать

$$(-1)^l \psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{k_1+k_2=m} \langle kk_1 kk_2 | lm \rangle (-1)^{k-k_1} \psi_{n_1 n_2 m}(\xi, \eta, \varphi), \tag{12}$$

$$(-1)^{k-k_1} \psi_{n_1 n_2 m}(\xi, \eta, \varphi) = \sum_{lm} \langle kk_1 kk_2 | lm \rangle (-1)^l \psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi), \tag{13}$$

причем квантовые числа $k_1$, $k_2$ и $n_1$, $n_2$ взаимно однозначно связаны соотношениями (4).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика, гл. 5, § 36, 37. М., 1974.
2. Rojansky V. «Phys. Rev.», 33, 1, 1929.
3. Park D. «Zs. f. Phys.», 159, 155, 1960.
4. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике, гл. I, § 5. М., 1971.
5. Кондон Е., Шортли Г. Теория атомных спектров. М., 1949.



Поступила в редакцию
18.9 1975 г.



НИИЯФ