

УДК 538.3 : 530.145

Ю. М. ЛОСКУТОВ, В. В. СКОБЕЛЕВ

## СВЕРХСИЛЬНЫЕ МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И ДВУМЕРНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ВАКУУМА

С использованием условия унитарности и дисперсионной техники найден поляризационный оператор фотонов в сверхсильном магнитном поле. Рассмотрены некоторые приложения.

В последнее время стало общепризнанным, что вблизи некоторых космических объектов (пульсары, нейтронные звезды) реализуются магнитные поля гигантской напряженности  $B \sim B_0 = m^2/e = 4,41 \cdot 10^{13}$  Гс. В таких полях могут в значительной степени усиливаться и стать наблюдаемыми некоторые эффекты, являющиеся следствием нелинейной электродинамики вакуума, которые ненаблюдаемы в обычных условиях. Например, Адлер и другие предсказали частичную поляризацию жесткого излучения пульсаров вследствие эффекта расщепления фотона [1].

В данной работе мы обращаем внимание на принципиальное отличие характера возбуждения электрон-позитронного вакуума в полях  $B \gtrsim B_0$  от других случаев. Именно при энергиях внешних частиц диаграммы (фотонов)  $k_0 \lesssim \sqrt{eB}$  не возбуждаются энергетические уровни виртуальных электронов, соответствующие «поперечному» движению, и их энергетический спектр является непрерывным (соответствует одномерному движению вдоль поля). Это возможно при  $B \gtrsim B_0$ , вне зависимости от степени малости  $k_0$ .

Применяя условие унитарности и стандартную дисперсионную технику (программа, аналогична [2]), мы вычислили «двумерный» поляризационный оператор фотона и, используя этот результат, нашли вакуумную поправку к закону Кулона и показатель преломления фотона в поле  $B \gg B_0$ . Последний результат совпал с выражением для показателя преломления, полученным в [3] для случая  $B \gg B_0$ , где мы использовали метод эффективного лагранжиана Гейзенберга—Эйлера—Швингера.

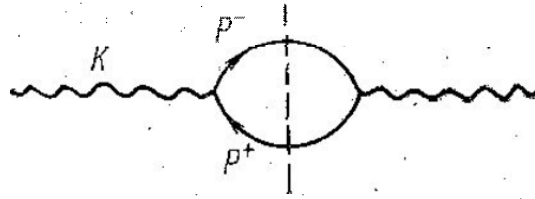
### Условие унитарности и реакция $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$

Рассмотрим диаграмму (см. рис.), где электронные линии берутся в постоянном и однородном магнитном поле  $B$ . Разрезанная диаграмма описывает превращение фотона ( $k^2 \neq 0$ ) в пару электрон—позитрон. Если для волновых функций электрона использовать решение в декар-

товых координатах [4], то движение по полю (ось  $z$ ) и одной из поперечных координат ( $y$ ) будет «свободным», так что естественно определить матричный элемент  $M_{if}$  ( $i$  — фотон,  $f$  — пара  $e^+e^-$ ,  $k_0^2 > 4m^2$ ):

$$S_{if} = \delta_{if} + i(2\pi)^3 \delta^{(3)}(k - p^+ - p^-) M_{if},$$

$$\delta^{(3)}(k - p^+ - p^-) \equiv \delta(k_0 - E^+ - E^-) \delta(k_3 - p_3^+ - p_3^-) \delta(k_2 - p_2^+ - p_2^-). \quad (1)$$



Определяя таким же образом матричный элемент неразрезанной диаграммы  $M_{ii}$ , запишем условие унитарности в виде

$$(2\pi)^3 \sum_{(f)} |M_{if}|^2 \delta^{(3)}(k - p^+ - p^-) = 2 \operatorname{Im} M_{ii}, \quad (2)$$

где

$$M_{ii} = -\frac{e_\mu e_\nu^*}{2k_0 V} \delta(0) P_{\mu\nu}(k),$$

$P_{\mu\nu}(k)$  — поляризационный тензор фотона. 4-импульс фотона на неразрезанной диаграмме (рис.) сохраняется, в чем нетрудно убедиться, записав пропагатор электрона в постоянном и однородном поле с потенциалом  $A$  в виде [5]

$$G(x, y) = \exp \left\{ \frac{ie}{2} \lambda a_\mu n_\nu (x - y)_\mu (x + y)_\nu \right\} G(x - y),$$

$$A_\mu = a_\mu (nx), \quad (an) = 0.$$

Разумеется, еще одна  $\delta$ -функция  $\delta(0) \equiv \delta(k_1 - k_1)$  должна появиться в левой части уравнения (2). Покажем, что она появляется при интегрировании по фазовому пространству пары.

Будем считать, что

$$4m^2 + 8\gamma > k_0^2 (> 4m^2), \quad \gamma = |eB|. \quad (3)$$

В этом случае поперечные уровни энергии электрона и позитрона не будут возбуждаться и их волновые функции имеют простой вид [4]. Для матричного элемента  $M_{if}$  тогда получаем

$$M_{if} = \frac{e \sqrt{4\pi} [(E^- + m)(E^+ - m)]^{-1/2}}{L_2 L_3 \sqrt{V} \sqrt{8k_0 E^+ E^-}} (\bar{u}_- \hat{e} u_+) \exp \left\{ -\frac{k_\perp^2}{4\gamma} - i \frac{k_1 (p_2^- - p_2^+)}{2\gamma} \right\}, \quad (4)$$

$$\bar{u}_- = (E^- + m, 0, -p_3^-, 0), \quad u_+^\dagger = (-E^+ + m, 0, -p_3^+, 0), \quad k_\perp^2 = k_1^2 + k_2^2.$$

Определяя обычным образом вероятность распада фотона  $W$  в единицу времени, находим

$$W = (2\pi)^3 L_2 L_3 \sum_{(f)} \delta^{(3)}(k - p^+ - p^-) M_{if} M_{if}^* =$$

$$= \frac{L_2^3 L_3^3}{2\pi} \int M_{if} M_{if}^* \delta(k_0 - E^+ - E^-) dp_2^+ dp_3^+, \quad (5)$$

$$p_3^+ + p_3^- = k_3, \quad p_2^+ + p_2^- = k_2.$$

Формальное интегрирование по  $p_2^+$  выделяет фактор

$$2\pi\delta\left(\frac{k_1 - k_1}{\gamma}\right) = 2\pi\gamma\delta(k_1 - k_1) \rightarrow \gamma L_1, \quad (6)$$

так что из выражения для  $\bar{W}$  исчезают нормировочные длины (а в левой части условия унитарности появляется  $\delta(0)$ ).

Усредняя (5) по поляризациям фотона

$$e_\mu e_\nu^* \rightarrow \frac{1}{3} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right),$$

после элементарного вычисления получаем

$$\bar{W} = \frac{4}{3} \frac{\alpha\gamma m^2 \exp(-k_\perp^2/2\gamma)}{k_0 \sqrt{k_0^2 - k_3^2} \sqrt{k_0^2 - k_3^2 - 4m^2}}, \quad (7)$$

причем члены  $\sim k_\mu k_\nu$  не дают вклада.

Если фотон находится на массовой поверхности ( $k^2=0$ ), то в (7) вместо  $1/3$  следует писать  $1/2$  (два состояния поляризации).

### Поляризационный оператор

Определяя поляризационный оператор согласно  $P_{\mu\nu} = P \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$  и комбинируя формулы (2), (5) и (7), находим<sup>1</sup>

$$\text{Im } P(t', k_\perp^2) = - \frac{4\alpha\gamma m^2}{\sqrt{t'(t' - 4m^2)}} \exp(-k_\perp^2/2\gamma), \quad (8)$$

$$k^2 \equiv t' = k_0^2 - k_3^2 > 4m^2.$$

Искомая функция  $P(t, k_\perp^2)$  удовлетворяет безвычитательному дисперсионному соотношению по переменной  $t$ :

$$P(t, k_\perp^2) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\text{Im } P(t', k_\perp^2)}{t' - t - i0} dt'. \quad (9)$$

Так как функция  $\text{Im } P(t', k_\perp^2)$ <sup>2</sup> определена лишь в области  $t' < 4m^2 + 8\gamma$ , то совместность этого условия с формулой (9) налагает следующие ограничения на значения  $t$  и  $\gamma$ :

$$\gamma \gg m^2 (B \gg B_0), \quad -t \ll \gamma. \quad (10)$$

Это означает также, что  $k_\perp^2 \ll \gamma$ , и экспоненту в (8) мы можем опустить. Таким образом, при выполнении (10)

$$P(t, k_\perp^2) \equiv P(t) = - \frac{4}{\pi} \alpha\gamma m^2 \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dt'}{(t' - t) \sqrt{t'(t' - 4m^2)}}. \quad (11)$$

<sup>1</sup> Мы учли, что в левой части (5) вклад дают лишь члены с  $\mu, \nu=0,3$ ; поэтому  $P_{\mu\nu}$  есть двумерный тензор:  $P_{\mu\nu}=0$  при  $\mu, \nu=1,2$ .

Как и в [2], интеграл легко берется с помощью подстановки

$$\frac{t'}{m^2} = \frac{(1 + \xi')^2}{\xi'}$$

Результат интегрирования имеет вид

$$P(t) = \frac{4}{\pi} \alpha \gamma \frac{\xi \ln \xi}{1 - \xi^2}, \quad -\frac{t}{m^2} = \frac{(1 - \xi)^2}{\xi} > 0. \quad (12)$$

Функция  $P(t)$  не удовлетворяет требованиям калибровочной инвариантности, так как  $P(0) \neq 0$ , и должна быть регуляризована:

$$P_R(t) \equiv P(t) - P(0) = \frac{4}{\pi} \alpha \gamma \left( \frac{1}{2} + \frac{\xi \ln \xi}{1 - \xi^2} \right), \quad (13)$$

$$P_R(t) \Big|_{|t| \ll m^2} = \frac{\alpha \gamma}{3\pi} \frac{|t|}{m^2}. \quad (14)$$

Регуляризованная функция  $P_R(t)$  удовлетворяет дисперсионному соотношению с одним вычитанием.

Аналитическое продолжение (13) в область  $4m^2 < t (\ll \gamma)$  осуществляется, как обычно, заменой  $\ln \xi \rightarrow \ln |\xi| + i\pi$ , причем мнимая часть получаемого при этом выражения совпадает, как и следует, с (8) (без экспоненты).

В области  $0 < t < 4m^2$  полагаем  $\xi = e^{i\varphi}$  и

$$P_R(t) = \frac{2}{\pi} \alpha \gamma \left( 1 - \frac{\varphi}{\sin \varphi} \right), \quad \frac{t}{4m^2} = \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (15)$$

В заключение этого раздела сделаем одно замечание. На первый взгляд формула (13) противоречит теореме Фарри, так как в матричный элемент диаграммы с двумя фотонными хвостами поле входит в нечетной степени. Однако, как легко видеть, это не так. В формуле (13) под  $B$  подразумевается  $|B|$  и замена  $B \rightarrow -B$  не меняет знака  $P_R(t)$ . С другой стороны, легко привести пример четной функции от  $x$ , которая в асимптотике становится «нечетной». Поэтому, рассматривая асимптотические значения  $B \gg B_0$ , мы автоматически должны понимать под  $B$  модуль  $B$ . Наглядные физические примеры подобного рода приведены в [3].

Заметим, что в случае скалярной петли

$$P_R(q) = -\frac{2\alpha\gamma}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \ln \xi \right). \quad (13a)$$

### Поправка к закону Кулона и показатель преломления фотона в сверхсильном магнитном поле<sup>1</sup>

В качестве иллюстраций полученных общих формул вычислим поправку к закону Кулона и показатель преломления фотона в сверхсильном магнитном поле  $B \gg B_0$ . Поправка к закону Кулона в координатном представлении в рассматриваемом порядке теории возмущений имеет вид [2]

$$\delta\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi Q \int \frac{P_R(\mathbf{k})}{(k^2)^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \quad (16)$$

<sup>1</sup> Вкладом скалярной петли можно пренебречь из-за большой массы пионов.

Интегрируя по азимутальному углу  $\mathbf{k}$ , получаем в цилиндрических координатах

$$\delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{Q}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \int_0^{\infty} dk_{\perp} \frac{k_{\perp} J_0(k_{\perp} r_{\perp})}{(k_3^2 + k_{\perp}^2)^2} P_R(-k_3^2) e^{ik_3 r_3}. \quad (17)$$

Требую, чтобы основной вклад в интеграл был в области  $k_3^2, k_{\perp}^2 \ll \gamma$ , рассматриваем лишь значения  $r^2 \gg 1/\gamma$ . При выполнении более жесткого условия  $r^2 \gg 1/m^2$  (иначе интеграл не берется аналитически) можно аппроксимировать  $P_R(-k_3^2)$  выражением (14). В итоге находим

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r} \left[ 1 - \frac{\alpha}{6\pi} \left| \frac{B}{B_0} \right| \sin^2 \theta \right], \quad (18)$$

$$r \gg m^{-1}, \quad \theta = \widehat{\mathbf{r}\mathbf{B}}.$$

Заметим, что при  $B \ll B_0$  добавка пропорциональна  $(B/B_0)^2$  [6]. При полях  $B \sim 6\pi B_0/\alpha$  искажение кулоновского потенциала будет существенно влиять на характер взаимодействия заряженных объектов (в том числе и макроскопических, так как эффективный заряд не убывает с ростом  $r$ , как в случае поляризации вакуума полем самого заряда  $Q$ ).

Связь между частотой  $k_0$  и волновым вектором фотона  $\mathbf{k}$  устанавливается приравниванием к нулю знаменателя фотонной функции Грина в уравнении Дайсона; при этом для фотонов, поляризованных перпендикулярно вектору  $[\mathbf{k}\mathbf{B}]$ , получаем соотношение

$$k_0^2 - \mathbf{k}^2 = P_R(t),$$

откуда, пренебрегая дисперсией, находим

$$n_{\perp} = 1 + \frac{\alpha}{6\pi} \left| \frac{B}{B_0} \right| \sin^2 \theta, \quad \theta = \widehat{\mathbf{k}\mathbf{B}},$$

что совпадает с результатом [3].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Adler S. L. et al. «Phys. Rev. Lett.», 25, 1970, 1061.
2. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. — Релятивистская квантовая теория, ч. 2, М., 1971.
3. Гальцов Д. В., Лоскутов Ю. М., Скобелев В. В. — «Вести. Моск. ун-та». Сер. III, физ., астроном., 13, № 5, 601, 1972.
4. Ахнезер А. И., Берестецкий В. Б. — Квантовая электродинамика. М., 1969.
5. Schwinger J. «Phys. Rev.», 82, 664, 1951.
6. Loskutov Yu. Skobelev V. «Phys. Lett.», 36A, 405, 1971

Поступила в редакцию  
8.10 1975 г.

Кафедра  
теоретической физики