Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4—1976

УДК 539.1.01

Ю. Г. ПАВЛЕНКО, А. Х. МУССА, А. С. ВШИВЦЕВ

ИНДУЦИРОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ, ДВИЖУЩИХСЯ В СРЕДЕ В ПОЛЕ ИНТЕНСИВНОЙ ВОЛНЫ

Найдены спектрально-угловые характеристики спонтанного и индуцированного излучения при движении электронов в среде в поле волны.

Исследуется вопрос об индуцированном излучении в зависимости от интенсивности волны, а также от показателя преломления среды.

Применение интенсивных волн открывает новые возможности для изучения различных квантовых эффектов в вакууме. Присутствие преломляющей среды существенным образом изменяет характер взаимодействия электронов с волной. Если волна достаточно слабая, то в первом порядке теории возмущений возникает возможность индуцированного черенковского излучения [1], эффект следующего порядка — рассеяние света электроном — приобретает ряд особенностей, обусловленных нормальным и аномальным эффектами Допплера [2]. При взаимодействии с интенсивной волной становится возможным захват частицы волной, причем частицы разных знаков заряда группируются в точках, отстоящих по фазе на 180°. Частота излучения в этом случае пропорциональна интенсивности волны. При этом амплитуда электромагнитной волны не должна превышать определенное значение, при котором происходит разрушение среды [3]:

$$\left(-\frac{e^2\overline{A}^2}{m^2c^4}\right)^{1/2} < \frac{\Delta}{mc^2},$$

где Δ — энергия связи внешнего электрона. Для напряженности электрического поля волны $E\sim 5\cdot 10^3$ В/см и частоты $\omega\sim 10^{15}$ 1/с это ведет к ограничению на значение амплитуды вектора потенциала $a\leqslant 0{,}1$ В.

Рассмотрим движение частицы в среде в поле плоской электромагнитной волны, описываемой потенциалом $A(\varphi)$, $(\varphi=kx)$. Для нахождения волновой функции будем исходить из уравнения Клейна—Гордона

$$(\pi^2 - m^2c^2)\,\Psi = 0, \tag{1}$$

$$\pi_\mu = p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu$$

для циркулярно-поляризованной волны

$$A^i = a_1^i \cos\varphi + a_2^i \sin\varphi,$$

$$a_1 a_2 = 0, \quad a_1^2 = a_2^2 \equiv a^2$$

уравнение (1) сводится к уравнению Матье [4].

Мы ограничимся случаем, когда частица движется в классической допустимой области:

$$\frac{k^2}{(kp)^2}\left\{\left(p - \frac{e}{c}A\right)^2 - m^2c^2\right\} \ll 1,$$

где p^i — импульс электрона в отсутствие волны. Тогда решение (1) имеет вид функций Волкова [5]:

$$\Psi = e^{i\frac{S}{\hbar}}, \tag{2}$$

$$S = -qx - \frac{e}{c}\left[\frac{(a_1p)}{(kp)}\sin\varphi - \frac{(a_2p)}{(kp)}\cos\varphi\right],$$

$$k^2 = \omega^2(1-n^2) \neq 0,$$

причем

$$q_\mu = p_\mu - \frac{e^2a^2}{2(kp)}k_\mu, \quad n = \sqrt{\varepsilon}.$$

Матричный элемент перехода из начального состояния с импульсом q в конечное с импульсом q' с испусканием фотона с 4-импульсом k' запишется так:

$$S_{fi} = -\frac{ie}{\hbar}\sqrt{\frac{4\pi\hbar c^2}{\nu}}\int \Psi_f^{+}\overleftrightarrow{\pi}_\mu e^{*\mu} e^{ik'x}\Psi_i\, d^4x,$$

$$\nu = \frac{\partial}{\partial\omega'}(\omega'^2 n^2). \tag{3}$$

Учитывая, что

$$e^{-\frac{iS_f}{\hbar}}\overleftrightarrow{\pi}_\mu e^{\frac{iS_i}{\hbar}} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{i(q'-q)x - is(kx-\varphi_0)} F_\mu(s, q, q')$$

$$F_\mu(s,q,q') = B_{0s}(q_\mu + q'_\mu) + eB_{1s}\left[k_\mu\left(\frac{a_1q}{kq} + \frac{a_1q'}{kq'}\right) - 2a_{1\mu}\right] +$$

$$+ eB_{2s}\left[k_\mu\left(\frac{a_2q}{kq} + \frac{a_2q'}{kq'}\right) - 2a_{2\mu}\right],$$

где коэффициенты B определены в [5], найдем

$$S_{fi} = (2\pi\hbar)^4\sum_{s=-\infty}^{\infty}\frac{\delta^4(q'-q+k'-sk)\,M_s}{(2q_0 2q'_0\nu)^{1/2}},$$

$$M_s = \frac{ie}{\hbar}\sqrt{4\pi\hbar c^2}\,F_\mu(s,q,q')\,e^{*\mu}.$$

Таким образом, матричный элемент S_{fi} представляет собой сумму членов, каждому из которых соответствует закон сохранения $sk+q = q'+k'$.

В отличие от случая движения в вакууме при наличии преломляющей среды s принимает как положительные, так и отрицательные значения. Для положительных значений s s-тый член суммы описывает излучение фотона k' за счет поглощения электроном из волны s-фотонов с импульсом k. Отрицательные s соответствуют излучению фотона k' и индуцированному излучению в волну s-фотонов с импульсом k.

Для дифференциальной вероятности излучения получим соотношение

$$dW_s = \frac{1}{(2\pi)^2} |M_s|^2 \frac{d^3k'}{v} \frac{d^3q'}{2q_0 \cdot 2q_0'} \delta^4 (q' + k' - q - sk), \qquad (4)$$

где

$$d^3k' = n \frac{v\omega'}{2c^3} d\omega' \, dO'.$$

Чтобы учесть конечность времени жизни τ электрона в начальном состоянии, временную δ-функцию в (4) заменим g-фактором [6]:

$$2\pi\delta(q_0) \to g(q_0) = \frac{4\tau}{1 + 4\tau^2 q_0^2}. \qquad (5)$$

Следовательно, для интенсивности излучения получим формулу

$$dP_s = \frac{\hbar\omega'^2 n(\omega')}{8(2\pi)^3 c^3 q_0 q_0'} |M_s|^2 d\omega' \, dO' \, g(q_0' + \omega' - q_0 - s\omega_0). \qquad (6)$$

Предположим, что $\hbar\omega' \ll q_0'$ и $\hbar\omega_0 \ll q_0$, частота излучения при этом определяется соотношением $(k'q) = s(kq)$. Для этого случая из (6) легко получается классический предел мощности спонтанного излучения.

Выберем для определенности $\mathbf{k} = (0, 0, 1)|\mathbf{k}|$, $\mathbf{k}' = \frac{\omega'}{c} n(\omega') \mathbf{n}'$, где вектор $\mathbf{n}'$ определяется сферическими углами θ, φ. В результате для двух компонентов линейной поляризации имеем:

$$dP_\lambda = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{2n(\omega') e^2 \omega'^2}{\pi c q_0^2} |R_\lambda|^2 dO', \qquad (7)$$

$$R_\varphi = J_s(z) \left[-q_x \sin\varphi + q_y \cos\varphi + \frac{s}{z} \frac{ea}{c} \sin(\varphi - \varphi_0) \right] + \\ + i \frac{ea}{c} J_s'(z) \cos(\varphi - \varphi_0),$$

$$R_\theta = J_s(z) \Big\{ (q_x \cos\varphi + q_y \sin\varphi) \cos\theta - q_z \sin\theta + \\ + \frac{s}{z} \frac{ea}{c} \left[-\frac{k \sin\theta}{(kq)} (q_x \cos\varphi_0 + q_y \sin\varphi_0) + \cos\theta \cos(\varphi - \varphi_0) \right] \Big\} + \\ + i \frac{ea}{c} J_s'(z) \left[\frac{k \sin\theta}{(kq)} (q_x \sin\varphi_0 - q_y \cos\varphi_0) + \cos\theta \sin(\varphi - \varphi_0) \right],$$

где

$$z=\frac{ea}{c(kq)}\left[k_\perp'^2+2k_0\,\frac{\mathbf{k}_\perp\mathbf{q}_\perp}{(kq)}(s\mathbf{k}-\mathbf{k}')\left(\frac{\mathbf{q}}{q_0}-\frac{\mathbf{k}}{k_0}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{k_0^2q_\perp^2}{(kq)^2}(s\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2\left(\frac{\mathbf{q}}{q_0}-\frac{\mathbf{k}}{k_0}\right)^2\right]^{1/2},$$

$$\cos\varphi_0=\frac{\alpha_1}{z},\quad \sin\varphi_0=\frac{\alpha_2}{z},$$

$$\alpha_{1,2}=\frac{e}{c}\left[\frac{(a_{1,2}\,q)}{(kq)}-\frac{(a_{1,2}\,q')}{(kq')}\right].$$

Если излучаемый квант является жестким $(n(\omega')\sim 1)$, то для излучаемой частоты находим выражение

$$\omega=s\,\omega_0\frac{\Delta_0-\dfrac{s\hbar\,\omega_0}{2cq_0}(n_0^2-1)}{\Delta+\dfrac{s\hbar\,\omega_0}{cq_0}(1-n_0\cos\theta)},$$

где

$$\Delta_0=1-n_0\beta_z,\quad \Delta=1-n(\omega')\,\mathbf{n}'\boldsymbol{\beta}.$$

В случае малой интенсивности падающего излучения $\left(\dfrac{ea}{cq_0}\ll 1\right)$ основной вклад дают гармоники с $s=\pm 1$, соответственно частоты излучения будут

$$\omega_{\pm 1}=\omega_0\frac{\Delta_0\mp\dfrac{\hbar\,\omega_0}{2cq_0}(n_0^2-1)}{\Delta\mp\dfrac{\hbar\,\omega_0}{cq_0}(1-n_0\cos\theta)}.$$

При движении частицы по оси z $(q_\perp=0)$ из формулы (7) следуют результаты работы [4].

Перейдем к вычислению мощности индуцированного излучения. В общем случае мощность индуцированного излучения определяется соотношением

$$dP_\lambda=\hbar\,\omega'\,(dw_\lambda^{(u)}-dw_\lambda^{(n)}),\tag{8}$$

где $dw_\lambda^{(u)}$ и $dw_\lambda^{(n)}$ — вероятность излучения и поглощения фотона с поляризацией λ и частотой ω'.

В классической области $|\Delta\mathbf{q}|/q_0\ll 1$ из (8) согласно [7] следует

$$\frac{dP_\lambda^{\text{инд}}}{d^3k'}=-\frac{(2\pi c)^3I_\lambda}{n\omega'^3\left(n+\omega'\dfrac{\partial n}{\partial\omega'}\right)}\Delta\mathbf{q}'\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}'}(P_\lambda^{\text{сп}}\,g)|_{\mathbf{q}'=\mathbf{q}}.\tag{9}$$

Далее, используя законы сохранения импульса, получим выражение для спектрально-углового распределения мощности излучения

$$dP_\lambda^{\text{инд}}=-\sum_{s=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi\,e^2c}{q_0}I_\lambda\left[gG_\lambda-\frac{\partial g}{\partial\omega'}\,F_\lambda\right]d\omega'\,dO',\tag{10}$$

где

$$G_\lambda = \frac{c}{4q_0\omega'}\frac{\Delta\mathbf{q}}{\hbar}\left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}'}|R_\lambda|^2 - 2|R_\lambda|^2\frac{\mathbf{q}}{q_0^2}\right]_{\mathbf{q}'=\mathbf{q}},$$

$$F_\lambda = \frac{c^2(s\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2}{4q_0^2\omega'}\left(1-\frac{\mathbf{q}^2}{q_0^2}\right)|R_\lambda|^2,$$

$$\frac{\partial g}{\partial\omega'} = -\frac{16\tau x}{(1+x^2)^2},$$

$$x = 2\tau\left(\omega' - s\,\omega_0\frac{\Delta_0}{\Delta}\right).$$

В случае движения с равным нулю поперечным импульсом ($q_\perp = 0$) для функций G_λ и F_λ найдем

$$G_\varphi = \frac{4e^2a^2}{c^2q_0^2}\frac{n}{\Delta_0}\left(\cos\theta - \frac{s\,\omega_0 n_0}{\omega' n}\right)(n_0-\beta_z)\times$$

$$\times\left[\left(1+\frac{\beta_z\Delta_0}{2(n_0-\beta_z)}\right)J_s'^2(z) - \frac{s^2-z^2}{z}J_s(z)J_s'(z)\right],$$

$$F_\varphi = \frac{e^2a^2\omega' n^2}{c^2q_0^2}(1-\beta_z^2)\left(1+\frac{s^2\omega_0^2n_0^2}{\omega'^2n^2} - 2\frac{s\omega_0 n_0}{\omega' n}\cos\theta\right)J_s'^2(z), \qquad (11)$$

$$G_\theta = \frac{4\omega_0^2\Delta_0}{n\omega'^2}\operatorname{ctg}^2\theta(n_0-\beta_z)\left(\cos\theta - \frac{s\,\omega_0 n_0}{\omega' n}\right)\times$$

$$\times\left(s - \frac{\omega' n}{\omega_0\Delta_0}\beta_z\sin\theta\operatorname{tg}\theta\right)\left[sJ_s^2(z)\left(1+\frac{\beta_z\Delta_0}{2(n_0-\beta z)}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(1-\frac{\omega' n}{s\,\omega_0\Delta_0}\beta_z\sin\theta\operatorname{tg}\theta\right)\right)-\right.$$

$$\left.-z\left(s-\frac{\omega' n}{\omega_0\Delta_0}\beta_z\sin\theta\operatorname{tg}\theta\right)J_s(z)J_s'(z)\right],$$

$$F_\theta = \frac{\omega_0^2\Delta_0^2}{\omega'}\operatorname{ct}^2 g\theta\left(s-\frac{\omega' n}{\omega_0\Delta_0}\beta_z\sin\theta\operatorname{tg}\theta\right)^2\times$$

$$\times\left(1+\frac{s^2\omega_0^2n_0^2}{\omega'^2n^2} - 2\frac{s\omega_0 n_0}{\omega' n}\cos\theta\right)(1-\beta_z^2)J_s^2(z).$$

Выражение (10) может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Величины G_λ и F_λ вблизи резонанса можно разложить в ряд Тейлора

$$G_\lambda(\omega') = G_\lambda\left(\frac{s\,\omega_0\Delta_0}{\Delta}\right) + O\left(\frac{\omega' - s\,\omega_0\Delta_0/\Delta}{s\,\omega_0\Delta_0/\Delta}\right), \qquad (12)$$

$$\tau F_\lambda(\omega') = \tau F_\lambda\left(\frac{c\,\omega_0\Delta_0}{\Delta}\right) + \frac{1}{2}x\frac{\partial F_\lambda}{\partial\omega'}\bigg|_{\omega'=s\omega_0\Delta_0/\Delta} +$$

$$+O\left(\frac{\omega' - s\omega_0\Delta_0/\Delta}{s\omega_0\Delta_0/\Delta}\right).$$

Далее, учитывая (12) для мощности излучения, получим следующее выражение:

$$\frac{dP_\lambda}{d\omega'\,dO'} = -\sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{8\pi e^2 c\tau I_\lambda}{q_0}\left[\frac{G_\lambda}{1+x^2} + \frac{4\tau x}{(1+x^2)^2} F_\lambda + \right.$$

$$\left. + \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}\frac{\partial F_\lambda}{\partial\omega'}\right]_{\omega'=\frac{s\omega_0\Delta_0}{\Delta}}, \qquad (13)$$

$$G_\varphi\left(\frac{s\,\omega_0\Delta_0}{\Delta}\right) = \frac{4e^2a^2}{c^2q_0^2}\frac{n}{\Delta_0}(n_0-\beta_z)\left(\cos\theta - \frac{n_0}{n}\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)\times$$

$$\times\left[\left(1+\frac{\beta_z\Delta_0}{2(n_0-\beta_z)}\right)J_s'^2(z) - \frac{s^2-z^2}{z}J_s(z)J_s'(z)\right],$$

$$F_\varphi\left(\frac{s\,\omega_0\Delta_0}{\Delta}\right) = \frac{e^2a^2n^2 s\,\omega_0\Delta_0}{c^2q_0^2\Delta}(1-\beta_z^2)\times$$

$$\times\left(1+\frac{n_0^2}{n^2}\frac{\Delta^2}{\Delta_0^2} - 2\frac{n_0}{n}\frac{\Delta}{\Delta_0}\cos\theta\right)J_s'^2(z),$$

$$G_\theta\left(\frac{s\,\omega_0\Delta_0}{\Delta}\right) = \frac{4\Delta_0}{n\Delta_0}\frac{\mathrm{ct}^2 g\theta}{\cos\theta}(n_0-\beta_z)\left(\cos\theta - \frac{n_0}{n}\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)(\cos\theta - h\beta_z)\times$$

$$\times\left[J_s^2(z)\left(1+\frac{\beta_z\Delta_0}{2(n_0-\beta_z)}\frac{\cos\theta-n\beta_z}{\Delta\cos\theta}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{z}{\Delta\cos\theta}(\cos\theta - n\beta_z)J_s(z)J_s'(z)\right], \qquad (14)$$

$$F_\theta\left(\frac{s\,\omega_0\Delta_0}{\Delta}\right) = \frac{s\,\omega_0\Delta_0}{\Delta\sin^2\theta}(\cos\theta - n\beta_z)^2(1-\beta_z^2)\times$$

$$\times\left(1+\frac{n_0^2}{n^2}\frac{\Delta^2}{\Delta_0^2} - 2\frac{n_0}{n}\frac{\Delta}{\Delta_0}\cos\theta\right)J_s^2(z),$$

где $n=n(\omega')$, $n_0=n(\omega_0)$.

Рассмотрим теперь частный случай: электрон в начальный момент покоится ($\mathbf{q}=0$). Тогда в формулах (11) и (14) следует положить $\beta_z=0$. В этом случае формула (13) имеет вид

$$\frac{dP_\varphi}{d\omega'dO'} = -\sum_{s=-\infty}^{\infty}\frac{16\pi e^2 c\tau I_\varphi}{q_0}n^2\left(\frac{ea}{cq_0}\right)^2\left\{\frac{2n_0/n}{1+x^2}\left(\cos\theta - \frac{n_0}{n}\right)\times\right.$$

$$\times\left(J_s'^2(z) - \frac{s^2-z^2}{z}J_s(z)J_s'(z)\right) + \frac{2\tau s\omega_0 x}{(1+x^2)^2}\left(1+\right.$$

$$\left. + \frac{n_0^2}{n^2} - 2\frac{n_0}{n}\cos\theta\right)J_s'^2(z) - \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\left[\left(1+3\frac{n_0^2}{n^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - 4\frac{n_0}{n}\cos\theta\right)J_s'^2(z) - 2\frac{s^2-z^2}{z}\left(1+\frac{n_0^2}{n^2} - 2\frac{n_0}{n}\cos\theta\right)J_s'(z)J_s(z)\right]\right\}, \qquad (15)$$

$$\frac{dP_\theta}{d\omega'dO'} = -\sum_{s=-\infty}^{\infty}\frac{16\pi e^2 c\tau I_\theta}{q_0}\mathrm{ct}^2 g\theta\left\{\frac{2n_0/n}{1+x^2}\left(\cos\theta - \frac{n_0}{n}\right)(J_s^2(z) - \right.$$

$$-zJ_s(z)J_s'(z)) + \frac{2\tau x s\omega_0}{(1+x^2)^2}\left(1+\frac{n_0^2}{n^2}-2\frac{n_0}{n}\cos\theta\right)J_s^2(z)-$$

$$-\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\left[\left(1+3\frac{n_0^2}{n^2}-4\frac{n_0}{n}\cos\theta\right)J_s^2(z)-\right.$$

$$\left.\left.-2z\left(1+\frac{n_0^2}{n^2}-2\frac{n_0}{n}\cos\theta\right)J_s(z)J_s'(z)\right]\right\}.$$

Из формулы (15) видно, что при $\theta=\pi/2$ усиливается или ослабляется только φ-компонент излучения. Отметим также, что в отличие от случая вакуума при движении частицы в поле волны в среде система может взаимодействовать с волной даже при $\theta=0$.

Проведем рассмотрение (10) при условии, что спектр внешнего излучения охватывает область многих гармоник $\Delta f \gg \frac{\omega_0}{2\pi}$. В этом случае величины $\Delta f \gg \frac{1}{\tau}$ и $g(\omega'-s\omega_0)\to 2\pi\delta(\omega'-s\omega_0)$, тогда, проводя интегрирование по частоте, получим для двух компонентов мощности излучения в направлении угла θ:

$$P_\varphi(\theta)=\frac{4\pi^2e^2c}{q_0}\left(\frac{ea}{cq_0}\right)^2\sum_{s=-\infty}^{\infty}n^2\left\{I_\varphi\left[\left(\left(1+7\frac{n_0^2}{n^2}-\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-8\frac{n_0}{n}\cos\theta+2\frac{sn_0}{n^2}\omega_0\frac{\partial n}{\partial\omega'}\left(\frac{n_0}{n}-\cos\theta\right)\right)J_s'^2(z)-\right.$$

$$-2\frac{s^2-z^2}{z}J_s(z)J_s'(z)\left(1+3\frac{n_0^2}{n^2}-4\frac{n_0}{n}\cos\theta+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{s\omega_0}{n}\frac{\partial n}{\partial\omega'}\left(1+\frac{n_0^2}{n^2}-2\frac{n_0}{n}\cos\theta\right)\right)\right]-$$

$$\left.-s\omega_0\frac{\partial I_\varphi}{\partial(s\omega_0)}\left(1+\frac{n_0^2}{n^2}-2\frac{n_0}{n}\cos\theta\right)J_s'^2(z)\right\},$$

$$P_\theta(\theta)=\frac{4\pi^2e^2c}{q_0}\operatorname{ct}^2 g\theta\sum_{s=-\infty}^{\infty}\left\{I_\theta\left[\left(\left(1+7\frac{n_0^2}{n^2}-8\frac{n_0}{n}\cos\theta+\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\frac{sn_0}{n^2}\omega_0\frac{\partial n}{\partial\omega'}\left(\frac{n_0}{n}-\cos\theta\right)\right)J_s^2(z)-2zJ_s(z)J_s'(z)\times\right.$$

$$\times\left(1+3\frac{n_0^2}{n^2}-4\frac{n_0}{n}\cos\theta+\frac{s\omega_0}{n}\frac{\partial n}{\partial\omega'}\left(1+\frac{n_0^2}{n^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-2\frac{n_0}{n}\cos\theta\right)\right)\right]-s\omega_0\frac{\partial I_\theta}{\partial(s\omega_0)}\left(1+\frac{n_0^2}{n^2}-2\frac{n_0}{n}\cos\theta\right)J_s^2(z)\right\}.$$

Наконец рассмотрим случай движения в поле волны в вакууме. В этом случае следует положить $n=n_0=1$, тогда из выражения (11) следует ($\beta_z=0$)

$$G_\varphi=\frac{4e^2a^2}{c^2q_0^2}\left(\cos\theta-\frac{s\omega_0}{\omega'}\right)\left[J_s'^2(z)-\frac{s^2-z^2}{z}J_s(z)J_s'(z)\right], \qquad (16)$$

$$F_\varphi = \frac{e^2a^2}{c^2q_0^2}\,\omega'\left(1+\frac{s^2\omega_0^2}{\omega'^2}-2\frac{s\omega_0}{\omega'}\cos\theta\right)J_s'^2(z),$$

$$G_\theta = 4\frac{s^2\omega_0^2}{\omega'^2}\,\mathrm{ct}^2\,g\theta\left(\cos\theta-\frac{s\omega_0}{\omega'}\right)[J_s^2(z)-zJ_s(z)J_s'(z)],$$

$$F_\theta = \frac{s^2\omega_0^2}{\omega'}\,\mathrm{ct}^2\,g\theta\left(1+\frac{s^2\omega_0^2}{\omega'^2}-2\frac{s\omega_0}{\omega'}\cos\theta\right)J_s^2(z).$$

Нетрудно видеть, что полученные выражения (16) для функций G_λ и F_λ отличаются от выражений, проведенных в работах [8], [9]. Для случая вакуума вместо формулы (15) получим

$$\frac{dP_\varphi}{d\omega' dO'} = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{32\pi e^2 c\tau I_\varphi}{q_0}\left(\frac{ea}{cq_0}\right)^2\frac{1-\cos\theta}{(1+x^2)^2}\times$$

$$\times\left\{(1+3x^2)\left[J_s'^2(z)-\frac{s^2-z^2}{z}J_s(z)J_s'(z)\right]-2\tau s\omega_0 xJ_s'^2(z)\right\}, \qquad (17)$$

$$\frac{dP_\theta}{d\omega' dO'} = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{32\pi e^2 c\tau I_\theta}{q_0}\,\mathrm{ct}^2\,g\theta\,\frac{1-\cos\theta}{(1+x^2)^2}\times$$

$$\times\{(1+3x^2)[J_s^2(z)-zJ_s(z)J_s'(z)]-2\tau s\omega_0 xJ_s^2(z)\}.$$

При малой интенсивности падающей волны $\left(\frac{ea}{cq_0}\ll 1\right)$ основной вклад дает одноквантовый комптон-эффект $s=1$. В этом случае формулу (17) приближенно можно записать в следующем виде:

$$\frac{dP_\varphi}{d\omega' dO'} = \frac{8\pi e^2 c\tau}{q_0}I_\varphi\left(\frac{ea}{cq_0}\right)^2\frac{1-\cos\theta}{(1+x^2)^2}\{(1+3x^2)z^2-2\tau\omega_0 x\}, \qquad (18)$$

$$\frac{dP_\theta}{d\omega' dO'} = -\frac{16\pi e^2 c\tau}{q_0}I_\theta\,\mathrm{ct}^2\,g\theta\,\frac{1-\cos\theta}{(1+x^2)^2}\,\omega_0 xz^2,$$

$$z = \frac{ea}{cq_0}\sin\theta.$$

Из формулы (18) видно, что усиление происходит при $x<0$ ($\omega'<s\omega_0$), если же $\omega'>s\omega_0$, то преобладает поглощение, в результате чего энергия электрона увеличивается.

Рассмотрим формулу (10) при движении электрона в вакууме и наличии широкого спектра внешнего излучения: $\tau\gg\frac{1}{\Delta f}$. Предположим, что функция числа фотонов $\hat{N}(\omega', \theta)$ является изотропной и степенным образом зависит от частоты $N(\omega', \theta)=N(\omega')=A(\omega')^{-\gamma}$. Тогда, после интегрирования (10) по спектру частот и суммированию по поляризациям падающего излучения, получим ($\beta_z\neq 0$):

$$\frac{dP}{d\cos\theta'} = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{Ae^2(1-\beta_z^2)(s\omega_0)^{3-\gamma}}{2\pi cq_0(1+\beta_z)^2}\left(\frac{1+\beta_z}{1+\beta_z\cos\theta'}\right)^{\gamma+1}[Q_1+(\gamma-3)Q_2],$$

$$Q_1 = \beta^2 J_s'^2(z)\{2(1-\cos\theta')[4+\beta_z(1-\beta_z^2)+2\beta_z(\cos\theta'-\beta_z)] -$$
$$-\beta_z^2(1-\beta_z^2)\sin^2\theta'\} - 2zJ_s(z)J_s'(z)\left(\operatorname{ctg}^2\theta' + \beta^2\frac{s^2-z^2}{z^2}\right)\times$$
$$\times[2(1-\cos\theta')(2+\beta_z(\cos\theta'-\beta_z)-\beta_z^2(1-\beta_z^2)\sin^2\theta'] +$$
$$+J_s^2(z)\left\{\operatorname{ctg}^2\theta'\left[2(1-\cos\theta')\left(4+\beta_z(1-\beta_z^2)+2\beta_z\left(\frac{1}{\cos\theta'}-\beta_z\right)+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\beta_z}{1+\beta_z\sin\theta'}\right)-\beta_z^2(1-\beta_z^2)\sin^2\theta'\right]+$$
$$\left.+2\beta_z(1-\beta_z^2)\cos\theta'\left(\frac{2(1-\cos\theta')-\beta_z^2\sin^2\theta'}{1+\beta_z\cos\theta'}\right)\right\}, \qquad (19)$$
$$Q_2 = (1-\beta_z^2)[2(1-\cos\theta')-\beta_z^2\sin^2\theta')](\beta^2 J_s'^2(z)+\operatorname{ctg}^2\theta' J_s^2(z)),$$
$$\beta^2 = \left(\frac{ea}{cq_0}\right)^2\frac{1}{1-\beta_z^2}.$$

Здесь θ' — угол, связанный с θ соотношением
$$\cos\theta = \frac{\beta_z+\cos\theta'}{1+\beta_z\cos\theta'},$$
$$\sin\theta = \sqrt{1-\beta_z^2}\,\frac{\sin\theta'}{1+\beta_z\cos\theta'}.$$

В том случае, когда $\left(\frac{ea}{cq_0}\right)^2 \simeq 1$ и $\beta_z \ll 1$, функции $J_s(z)$ и $J_s'(z)$ аппроксимируются функциями Эйри:
$$J_s(z) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{y}}\,\Phi(y), \quad J_s'(z) = -\frac{\varepsilon}{y}\,\Phi'(y).$$
Здесь $y = \left(\frac{s}{2}\right)^{2/3}\varepsilon$ и $\varepsilon = 1-\beta^2\sin^2\theta'$.

Интегрируя (19) по углу θ', получим ($x = s^{2/3}\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = 1-\beta^2$)
$$P = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{e^2\omega_0 A(s\omega_0)^{2-\gamma}}{\sqrt{\pi}\,cq_0}\left\{\left(1-\gamma-\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\int_x^\infty\Phi(t)\,dt+\right.$$
$$\left.+2x\Phi(x)\left(1-\frac{\varepsilon_0}{2}\right)-\frac{2}{x}(1+\gamma)\Phi'(x)\right\}. \qquad (20)$$

Из формулы (20) видно, что основной вклад дают члены с $s \ll \varepsilon_0^{-3/2}$. При больших s ($s \gg \varepsilon_0^{-3/2}$) преобладает излучение, но поскольку функции Эйри экспоненциально убывают при росте аргумента, то вклад высоких гармоник несуществен. В обратном случае ($s \ll \varepsilon_0^{-3/2}$) аргумент функций Эйри мал и их можно аппроксимировать Г-функциями.
$$P = \frac{e^2\omega_0(s\omega_0)^{2-\gamma}A}{\sqrt{\pi}\,cq_0}\left\{\left(1-\gamma-\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\int_x^\infty\Phi(t)\,dt+\right.$$
$$\left.+\frac{x(1-\varepsilon_0/2)}{\sqrt{3\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1+\gamma}{x}\frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{3\pi}}\right\}. \qquad (21)$$

Отсюда видно, что при значениях $\gamma \geqslant -1$ преобладает излучение, а при $\gamma < -1$ — поглощение.

В заключение авторы благодарят участников семинара проф. А. А. Соколова за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цытович В. Н. — «Успехи физических наук», **89**, 89, 1966.
2. Франк И. М. — «Ядерная физика», **7**, 1100, 1968.
3. Бункин Ф. В., Казаков А. Е., Федоров М. В. — «Ядерная физика», **10**, 559, 1972.
4. Дементьев А. С., Кулькин А. Г., Павленко Ю. Г. — ЖЭТФ, **62**, 161, 1972.
5. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория поля, ч. I. М., 1968.
6. Тябликов С. В., Бонч-Бруевич В. Л. Теория возмущений для двухвременных температурных функций Грина. Ротапринт МИАН СССР Т-7 (§ 29).
7. Кулькин А. Г., Павленко Ю. Г. — «Вестн. Моск. ун-та. Сер. III. Физ. астрон.», **14**, № 1, 28, 1973.
8. Багров В. Г. Клименко Ю. И., Халилов В. Р. — ЖЭТФ, **57**, 922, 1969.
9. Тернов И. М., Халилов В. Р. — «Ядерная физика», **16**, 174, 1972.

Поступила в редакцию
7.7 1975 г.

Кафедра
теоретической физики