

В. В. АБГАРЯН, В. В. КАРПОВ, И. И. МИНАКОВА

## МЕТОД ДРОБНО-КРАТНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ГЕНЕРАТОРОВ

Предложен метод получения широких областей устойчивой дробно-кратной синхронизации путем перехода к синхронизации на основном тоне. Исследованы стационарные процессы для случая, когда на выходе системы необходимо получить сигнал, находящийся в одном из трех близких дробно-кратных соотношений относительно входного. Эксперименты показали хорошее качественное соответствие спектра с рассчитанным на ЭВМ. Небольшое количественное расхождение находит объяснение в рамках приближенной теории.

Задача дробно-кратной синхронизации порядка  $n/m$ , где  $n$  и  $m$  целые некрратные числа, рассматривалась неоднократно [1, 2] главным образом для релаксационных генераторов. Получение дробно-кратной синхронизации гармонических генераторов весьма затруднительно, полосы синхронизации очень узки, при небольшом изменении частоты синхронизируемого генератора легко происходит срыв к целочисленной синхронизации. Достаточно широкие устойчивые области для ряда кратностей и возможность перестройки от одного порядка кратности к другому могут быть получены путем специальных преобразований частоты и перехода от дробно-кратной синхронизации к синхронизации на основном тоне. Такой переход может быть осуществлен, если для синхронизации двух колебаний, частоты которых равны  $f_1$  и  $f_2 \approx \left(\frac{n}{m}\right)_i f_1$  ( $i$  — порядковый номер кратности), использовать три генератора  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с частотами  $F_0$ ,  $F_1 = F_0 + f_1$  и  $F_2 = F_0 + f_2$  ( $F_0 \gg f_1$  и  $f_2$ ) и осуществить преобразование частот первых двух генераторов так, чтобы получить колебание с частотой  $\Phi_i = F_0 + \left(\frac{n}{m}\right)_i f_1$ . Воздействуя колебанием этой частоты на третий генератор и выделяя разностные частоты (от двух пар генераторов)  $f_1 = (F_0 + f_1) - F_0$  и  $f_2 = (F_0 + f_2) - F_0$ , получим дробно-кратную синхронизацию частоты  $f_2$  частотой  $f_1$  при кратности  $\left(\frac{n}{m}\right)_i$ . Преобразование частот первых двух генераторов может быть проведено для различных отношений  $\left(\frac{n}{m}\right)_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) по параллельным каналам. При наличии  $N$  каналов можно получить  $N$  внешних сил, одновременно действующих на третий генератор. Если ширина полосы синхронизации частотой  $\Phi_i$  генератора  $\Gamma_2$  уже удвоенной разно-

сти соседних частот  $2\Delta_i < 2(\Phi_{i+1} - \Phi_i)$ , то при перестройке  $\Gamma_2$  получим последовательный переход от синхронизации автогенератора одной частотой  $\Phi_i$  к синхронизации другой частотой  $\Phi_{i+1}$ .

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением задачи дробно-кратной синхронизации частот  $f_1$  и  $f_2$  для трех кратностей ( $N=3$ ). При этом исследование синхронизаций генератора  $\Gamma_2$  частотой  $\Phi_i$  проводится с учетом влияния возбуждения на соседних частотах  $\Phi_{i-1}$  и  $\Phi_{i+1}$ . При действии на генератор трех гармонических сил синхронизация генератора  $\Gamma_2$  будет происходить с той частотой, которая ближе к собственной частоте генератора. Амплитуды внешних воздействий выберем такими, чтобы полосы синхронизации генератора ближайшими воздействиями частично перекрывались. Крайние частоты  $\omega_1$  и  $\omega_3$  ( $\omega_i = 2\pi \cdot \Phi_i$ ) разнесены на расстояние порядка  $3\Delta_0$  ( $\Delta_0 = \frac{\omega_0^2 P_i}{2\omega_i A_0}$ ),

где  $P_i$  — амплитуда с частотой  $\omega_i$ ,  $A_0$  и  $\omega_0$  — амплитуда и частота автономных автоколебаний генератора  $\Gamma_2$ . Поэтому в пределах полосы синхронизации генератора воздействием частоты  $\omega_1$  (область 1) или  $\omega_3$  (область 3) можно ограничиться рассмотрением воздействия на синхронизованный генератор только одного дополнительного воздействия с частотой  $\omega_2$ , допуская при этом погрешность менее 10% [3].

В полосе синхронизации частотой  $\omega_2$  (область 2), особенно вблизи  $\omega_2$ , существенно влияние как  $\omega_1$ , так и  $\omega_3$  и, следовательно, в этой области уже нельзя ограничиться рассмотрением двухчастотного воздействия на автогенератор. В качестве генератора  $\Gamma_2$  наиболее целесообразно использовать автогенератор с мягким предельным циклом. Амплитуда такого генератора существенно изменяется в полосе синхронизации, при этом влияние несинхронизирующих сил минимально.

Уравнение движения в автогенераторе при воздействии на него трех гармонических сил может быть записано в виде

$$\ddot{x} + 2\delta(x)\dot{x} + \omega_0^2 x = \sum_{i=1}^N \omega_0^2 P_i \cos \omega_i t \quad (1)$$

при  $N=3$ . При кубической аппроксимации характеристики нелинейного элемента  $\delta(x) = \delta_0 + \delta_2 x^2$ , где  $\delta_0 = \delta + \delta_0$ ,  $\delta$  — декремент контура,  $\delta_0$  — инкремент генератора.

В стационарном режиме в силу перекрытия полос синхронизации генератора ближайшими воздействиями всюду во всех трех областях генератор оказывается синхронизованным одним из воздействий и появление собственной частоты автогенератора  $\omega_0$  невозможно.

В области 1 в уравнении движения (1) можно положить  $N=2$  в силу мягкости предельного цикла. Движение в системе при принятой аппроксимации характеристики нелинейного элемента может быть представлено в виде

$$x = A_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t - \varphi_2) + A_{k_1} \sin[(2\omega_1 - \omega_2)t - \varphi_{k_1}] + A_{k_2} \sin[(2\omega_2 - \omega_1)t - \varphi_{k_2}]. \quad (2)$$

Выбор только четырех спектральных составляющих в (2) обусловлен малостью амплитуд спектральных составляющих с частотами  $3\omega_1 - 2\omega_2$  и  $3\omega_2 - 2\omega_1$ , являющихся следующими членами комбинационного взаимодействия частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  [3]. Так как разность частот  $\omega_1 - \omega_2 = 2\pi f_1 \left[ \left( \frac{n}{m} \right)_1 - \left( \frac{n}{m} \right)_2 \right]$  при фиксированной частоте  $f_1$  постоян-

на, то порядок малости амплитуд спектральных составляющих с частотами  $3\omega_1 - 2\omega_2$  и  $3\omega_2 - 2\omega_1$  сохраняется при любых значениях собственной частоты автогенератора  $\omega_0$  внутри диапазона синхронизации.

При движении (2) уравнение (1) можно разбить на систему уравнений с частотами спектральных составляющих (2). При этом учитывается взаимодействие этих составляющих в нелинейном элементе, т. е. уравнение (1) приводит к системе уравнений:

$$\ddot{x}_j + 2[\delta(x)\dot{x}]_j + \omega_0^2 x_j = F_j, \quad (3)$$

где  $j=1, 2, k_1, k_2$ ;  $F_j$  — внешняя сила на частоте той спектральной составляющей, для которой записано уравнение.

Применяя энергетический метод Теодорчика, из (3) получим систему  $2j_{\max}$  укороченных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dA_i}{dt} &= -A_i \left[ \delta_0 + \frac{\delta_2}{4} (B^2 - A_i^2) \right] - \frac{\delta_2}{4} A_j [2A_i A_{ki} \cos \psi_i + \\ &+ A_j A_{kj} \cos \psi_j + 2A_{ki} A_{kj} \cos (\psi_i + \psi_j)] + \frac{P_i \omega_0^2}{2\omega_i} \cos \varphi_i, \\ A_i \frac{d\varphi_i}{dt} &= A_i \Delta_i + \frac{\delta_2}{4} A_j [2A_i A_{ki} \sin \psi_i - A_j A_{kj} \cos \psi_j + \\ &+ 2A_{ki} A_{kj} \sin (\psi_i + \psi_j) + \frac{P_i \omega_0^2}{2\omega_i} \sin \varphi_i], \\ \frac{dA_{ki}}{dt} &= -A_{ki} \left[ \delta_0 + \frac{\delta_2}{4} (B^2 - A_{ki}^2) \right] - \\ &- \frac{\delta_2}{4} A_i A_j [A_i \cos \psi_i + 2A_{kj} \cos (\psi_i + \psi_j)], \\ A_{ki} \frac{d\varphi_{ki}}{dt} &= A_{ki} \Delta_{ki} - \frac{\delta_2}{4} A_i A_j [A_i \sin \psi_i + 2A_{kj} \sin (\psi_i + \psi_j)], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $i$  и  $j$  попарно меняющиеся индексы ( $i=1, j=2, i=2, j=1$ ),  $B^2 = 2 \sum_{l=1}^2 (A_l^2 + A_{kl}^2)$ ,  $\psi_1 = 2\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_{k1}$ ,

$$\psi_2 = 2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_{k2},$$

$$\Delta_i \simeq \omega_i - \omega_0,$$

$$\Delta_{ki} \simeq 2\omega_i - \omega_j - \omega_0.$$

В уравнениях для амплитуд отчетливо просматривается асинхронное воздействие всех типов колебаний на заданный, вызывающее в автоколебательной системе взаимное снижение амплитуд колебаний. Комбинационное взаимодействие всех частот, обеспечивающее вклад энергии в данный тип колебаний или перенос ее на другой тип, присутствует как в уравнениях для амплитуд, так и в уравнениях для фаз. Очевидно, все рассуждения и полученная система уравнений справедлива и для области 3 с соответствующей заменой индексов.

В области 2 учтем в первую очередь влияние на синхронизованный на частоте  $\omega_2$  генератор воздействий с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_3$ , пренебрегая более слабым воздействием комбинационных спектральных составляющих. Решение запишем в виде

$$x = \sum_{j=1}^3 A_j \sin(\omega_j t - \varphi_j). \quad (5)$$

В этом случае получим систему укороченных уравнений:

$$\frac{dA_j}{dt} = -A_j \left[ \delta_0 + \frac{\delta_2}{4} (B^2 - A_j^2) \right] + \frac{P_j \omega_0^2}{2\omega_j} \cos \varphi_j, \quad (6)$$

$$A_j \frac{d\varphi_j}{dt} = A_j \Delta_j - \frac{P_j \omega_0^2}{2\omega_j} \sin \varphi_j,$$

где  $j=1, 2, 3$ ;

$$\Delta_j \approx \omega_j - \omega_0,$$

$$B^2 = 2 \sum_{j=1}^3 A_j^2.$$

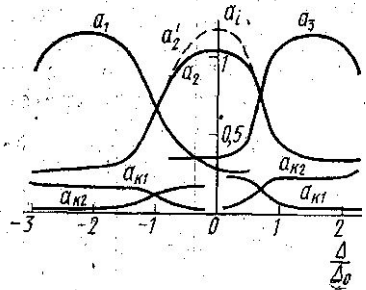


Рис. 1. Расчетная зависимость амплитуд спектральных составляющих от расстройки  $a_i = A_i/A_0$ ,  $\Delta = \omega_0 - \omega_i$

Из уравнения (6) видно, что в данном приближении колебания с частотами  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  оказываются связанными только асинхронным взаимодействием.

Аналитическое решение систем уравнений (4) и (6) не представляется возможным получить даже в стационарном режиме ( $dA_j/dt=0$ ;  $d\varphi_j/dt=0$ ). Поэтому решение полученных систем дифференциальных уравнений было осуществлено на ЭВМ путем численного интегрирования по методу Рунге—Кутты. Расчет амплитудно-частотных характеристик был произведен для автогенератора с мягким предельным циклом, параметры которого  $\frac{\delta_0}{\omega_0} = -0,016$  и  $\frac{\delta_2}{\omega_0} = 0,003$ .

Выбирая при этом  $K \equiv \frac{P_1}{A_0} = \frac{1}{50}$  ( $A_0 = \sqrt{-4\delta_0/\delta_2}$ ) и учитывая, что в силу мягкости предельного цикла срыв синхронного режима при одночастотном воздействии на автогенератор определяется амплитудным условием устойчивости, получаем значение полуширины относительной полосы синхронизации:

$$\frac{\Delta_0}{\omega_0} = \sqrt{2K^2 - \frac{\delta_0^2}{4}} = 0,0117. \quad (7)$$

Задаваясь отношениями  $n/m$  вида:  $3/4$ ,  $4/5$  и  $5/6$ , видим, что  $\Delta'' = \omega_2 - \omega_1 = 1,5 \Delta'$  ( $\Delta' = \omega_3 - \omega_2$ ). Из условия частичного перекрытия полос синхронизации получаем  $\Delta' = 1,3 \Delta_0$ . Зависимость амплитуд  $a_i$  от относительной расстройки  $\Delta/\Delta_0$ , рассчитанная по (4) и (6), приведена на рис. 1.

Блок-схема установки для исследования дробно-кратной синхронизации частот  $f_1$  и  $f_2$  для трех кратностей изображена на рис. 2, а. На рис. 2, б в развернутом виде показан один из блоков формирования синхронизирующего воздействия (БФСВ). Схема получения колебания с частотой  $\left(\frac{n}{m}\right)_1 f_1$  является логическим развитием схемы, предложенной ранее Л. С. Терменом [4].



ции по сравнению с разностной частотой  $f_2 \left( 2\Delta_0 \sim \frac{2\pi}{15} f_2 \right)$ , а, следовательно, влиянием на генератор воздействий с частотами  $F_0$  и тем более  $F_0 - \frac{n}{m} f_1$  можно пренебречь.

С помощью приведенной на рис. 2, а установки экспериментально наблюдались спектральные закономерности поведения автогенератора  $G_2$  при его синхронизации тремя внешними воздействиями близких частот  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  равных амплитуд. Амплитуды отдельных компонентов в спектре синхронизованного генератора измерялись косвенным образом на звуковой частоте с выхода второго смесителя, работающего в линейном режиме. Измерение спектра на выходе второго смесителя выгодно с той точки зрения, что при преобразовании частоты вниз снижаются на два порядка требования, предъявляемые к разрешающей способности спектроанализатора. Разрешающая способность спектроанализатора составляла примерно 60 Гц при частоте исследуемого сигнала около 1500 Гц и

$$\frac{\omega_i + \omega_{i \pm 1}}{2\pi} \approx 90 \text{ Гц.}$$

Результаты измерений приведены на рис. 3. На графике изображены амплитудно-частотные характеристики для спектральных составляющих, имеющих только ча-

стоты кратностей 3/4, 4/5 и 5/6 частоты внешних воздействий соответственно равны 151 320, 151 408 и 151 468 Гц при  $f_1 = 1760$  Гц (частоты генераторов  $F_0$  и  $F_1$  при этом соответственно равны 150 000 и 151 760 Гц). Амплитуда автономного режима автогенератора выбиралась такой, чтобы при полосе синхронизации  $\Delta_0/\pi = 90$  Гц обеспечить мягкость предельного цикла автогенератора. Ошибка измерений составляла 4%. Сравнение графиков (рис. 1 и 3) для основных спектральных составляющих  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  показывает хорошее качественное соответствие результатов, полученных теоретически и экспериментально.

В области синхронизации генератора воздействием с частотой  $\omega_2$  вклад в изменение  $a_2$  асинхронного и комбинационного взаимодействий составляющих  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  равнозначен. Действительно, расчет на ЭВМ в области II с учетом только асинхронного взаимодействия колебаний трех частот  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  дает меньшее значение  $a_2$ , чем  $a_2'$  (пунктир рис. 1), полученная при учете асинхронного и комбинационного взаимодействия колебаний частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$ <sup>1</sup>. В области I (III) учет асинхронного воздействия  $a_3(a_1)$  несколько снижает амплитуду  $a_1(a_3)$ , не оказывая существенного влияния на характер изменения с расстройкой амплитуд спектральных составляющих. На рис. 1 уменьшению  $a_1$  при включении воздействия соответствует разность между пунктирной прямой и максимальным значением относительной амплитуды.

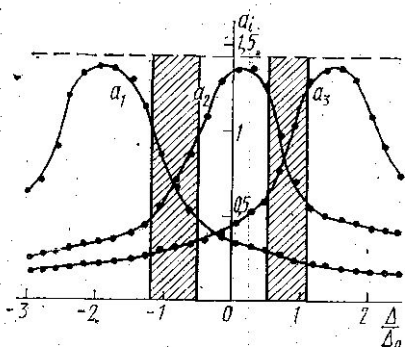


Рис. 3. Экспериментальная зависимость амплитуд спектральных составляющих от расстройки

<sup>1</sup> При увеличении расстройки влияние асинхронного воздействия уменьшается.

Комбинационные частоты  $\omega_{h1}$  и  $\omega_{h2}$  в эксперименте наблюдались. Однако амплитуды этих составляющих  $a_{h1}$  и  $a_{h2}$  не превышали 5% от  $A_0$  и поэтому на экспериментальном графике не показаны. Экспериментальный генератор  $\Gamma_2$  имел большую мягкость предельного цикла, чем было принято при расчете, что приводит к улучшению селективных свойств автоколебательной системы.

Итак, в области  $\omega_1 - \Delta_0 < \omega_2 < \omega_3 + \Delta_0$  автогенератор  $\Gamma_2$  оказывается синхронизованным одним из трех воздействий с частотами  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ . Амплитуды колебаний с другими частотами составляют менее 50% от амплитуды колебания с частотой синхронизирующего воздействия всюду, за исключением небольших областей изменения частоты  $\omega_0$  (на рис. 3 заштрихованы). Вне указанных областей от колебаний с неосновными частотами воздействия можно освободиться, например, с помощью стандартной пороговой схемы. Таким образом, на 70—80% всей области синхронизации автогенератора тремя воздействиями на выходе двух смесителей предложенной схемы (рис. 2, а) можно получить частоты  $f_1$  и  $f_2$ , отношения которых при перестройке частоты  $\omega_0$  будут последовательно принимать одно из трех значений  $3/4$ ,  $4/5$  и  $5/6$ .

В заключение отметим одно важное преимущество рассматриваемой схемы синхронизации по сравнению с обычной дробно-кратной синхронизацией. Перенос процесса синхронизации в область более высоких частот  $\omega$  (отличающихся от  $f$  на 2—3 порядка) приводит к тому, что время установления стационарного синхронного режима при изменении параметров системы порядка или меньше периодов  $1/f_1$  и  $1/f_2$ .

Рассматриваемая схема дробно-кратной синхронизации может быть дополнена (как это показано пунктиром на рис. 2, а) с тем, чтобы осуществить взаимную дробно-кратную синхронизацию гармонических генераторов  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сб.: Многоустойчивые элементы и их применение. М., 1971.
2. Королев В. И., Миллер А. И. — «Изв. вузов. радиотехника», № 6, 1970.
3. Карпов В. В., Минакова И. И. — «Вестн. Моск. ун-та. Сер. III, физ., astron.», 1976, 17, № 3.
4. Термен Л. С. — Материалы VI Всесоюзной акустической конференции, 1968.

Поступила в редакцию  
24.6 1975 г.

Кафедра  
физики колебаний