Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4—1976

УДК 621.373

Ю. М. АЗЬЯН, А. С. МКРТУМОВ

# УСТОЙЧИВОСТЬ МНОГОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ГЕНЕРАТОРЕ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Получены с помощью метода гармонического баланса условия устойчивости многочастотных колебаний. Показано, что для устойчивости периодического процесса необходима синхронизация как минимум трех мод. Рассматриваются также непериодические процессы.

В генераторах с запаздывающей обратной связью (ГЗОС), состоящих из замкнутых в кольцо усилителя и линии задержки, в принципе могут существовать многочастотные автоколебания, спектр которых состоит из нескольких составляющих со сравнимыми по величине амплитудами. Эти колебания могут быть непериодическими (когда частоты хотя бы двух составляющих несоизмеримы) и периодическими (образованными в результате самосинхронизации мод). При использовании указанных генераторов, например, в качестве многопозиционных устройств с частотным представлением информации многочастотные режимы недопустимы, что делает необходимым изучение условий их существования.

## Метод анализа устойчивости

Колебания в генераторах с запаздывающей обратной связью удобно исследовать методом гармонического баланса, применение которого к одночастотным колебаниям хорошо известно [1, 2]. Также известно обобщение метода на случай многочастотных колебаний [3], состоящее в том, что коэффициенты гармонической линеаризации зависят от параметров всех спектральных компонентов, входящих в рассмотрение. Получим с помощью этого метода условия устойчивости многочастотных колебаний.

Система состоит из активного элемента с однозначной нелинейной характеристикой $U_{вых}=f(U_{вх})$ и произвольной линейной цепи обратной связи (в частных случаях это многорезонансная высокодобротная система или же широкополосная линия задержки).

Рассматривается устойчивость стационарного режима, состоящего из $n$ гармонических колебаний, составляющих $m$ взаимно асинхронных периодических групп. Количество медленных переменных равно $2n-m$, куда входят $n$ амплитуд гармоник и $n-m$ фазовых сдвигов между основным тоном группы и учитывающимися обертонами. Первые $m$ номеров присвоим основным тонам. Фазовые сдвиги между обертоном $\dot{a}_i = a_i e^{j\psi_i}$ и его основным тоном $\dot{a}_q = a_q e^{j\psi_q}$, входящие в коэффициенты гармонической линеаризации, равны $\varphi_i = \psi_i - l_i\psi_q$, где $l_i = \omega_{i0}/\omega_{q0}$ — целое или дробь малых целых чисел; $\omega_{i0}$ и $\omega_{q0}$ — стационарные частоты обертона $a_i$ и основного тона $a_q$.

Проводим гармоническую линеаризацию для каждой гармоники: отношение комплексной амплитуды на выходе нелинейного звена к амплитуде на его входе обозначим $\dot{K}_{i\text{н}}(a_1, \ldots, a_n, \varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_n)$. Далее эта совокупность аргументов обозначается $(a, \varphi)$. Амплитуда каждой гармоники на выходе усилителя вычисляется как соответствующий коэффициент в разложении выходного колебания в $m$-кратный ряд Фурье [4]. Коэффициент передачи линейной части обозначим $\dot{K}_\text{л}(p)$. Коэффициент передачи системы для данной гармоники $\dot{K}_i(p_i, a, \varphi) = \dot{K}_{i\text{н}}\dot{K}_\text{л}(p_i)$. Движение в системе определяется системой уравнений гармонического баланса

$$\dot{K}_i(p_i, a, \varphi) = 1, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

решением которой для каждой совокупности значений $a$ и $\varphi$ является совокупность значений $p_i = p_i(a, \varphi)$. Изменения $a$ и $\varphi$ со временем подчиняются уравнению [1, 2]:

$$\frac{d\dot{a}_i}{dt} = p_i(a, \varphi)\dot{a}_i,$$

здесь и далее отклонение от стационарного состояния считается малым.

Отдельно для амплитуд и фаз имеем

$$\frac{da_i}{dt} = a_i \operatorname{Re} p_i, \qquad \frac{d\psi_i}{dt} = Im\, p_i. \tag{2}$$

Параметры стационарного режима находятся, как известно, из системы уравнений:

$$\dot{K}_i(j\omega_{i0}, a_0, \varphi_0) = 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Пусть система получит случайное отклонение от стационарного режима. Обозначив $\xi_i = a_i - a_{i0}$ и $\eta_i = \varphi_i - \varphi_{i0}$, в первом приближении получим для $\xi$:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = a_{i0} \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial a_k}(j\omega_{i0}, a_0, \varphi_0)\xi_k + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial \varphi_k}(j\omega_{i0}, a_0, \varphi_0)\eta_k\right);$$

далее все частные производные также подразумеваются взятыми при стационарных значениях параметров.

Чтобы перейти к медленным переменным $\varphi_i$ во втором уравнении (2), введем верхний индекс $l$ для параметров основных тонов, высшими гармониками которых являются $a_i$. Тогда для $\varphi_i$ получим

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\psi_i - l_i\psi_i^l) = Im(p_i - l_i p_i^l).$$

Первое приближение для $\eta$:

$$\frac{d\eta_i}{dt} = Im\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial p_i}{\partial a_k} - l_i\frac{\partial p_i^l}{\partial a_k}\right)\xi_k + \sum_{k=m+1}^{n}\left(\frac{\partial p_i}{\partial \varphi_k} - l_i\frac{\partial p_i^l}{\partial \varphi_k}\right)\eta_k\right].$$

Так как зависимость $p_i(a, \varphi)$ задана неявно посредством уравнения (1), то

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} = -\frac{\partial \dot{K}_i}{\partial a_k}\left(\frac{\partial \dot{K}_i}{\partial p_i}\right)^{-1}; \quad \frac{\partial p_i}{\partial \varphi_k} = -\frac{\partial \dot{K}_i}{\partial \varphi_k}\left(\frac{\partial \dot{K}_i}{\partial p_i}\right)^{-1}.$$

Учитывая, что частные производные берутся в точке $p_i = \mathrm{j}\omega_{i0}$,

$$\frac{\partial \dot{K}_i}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial j\omega}\left[K_i(\omega)\, e^{j\Psi_i(\omega)}\right] = \frac{\partial \Psi_i}{\partial \omega} - j\frac{\partial K_i}{\partial \omega}.$$

Обозначая $\varphi_i = a_{n-m+i}$ (т. е. $\varphi_{m+1} = a_{n+1}, \ldots$), получим характеристическое уравнение в виде

$$\det(\alpha_{ik} - \delta_{ik}\lambda) = 0, \tag{3}$$

где $\delta_{ik}$ — символ Кронекера, ранг матрицы равен $2n-m$, при $i \leqslant n$

$$\alpha_{ik} = \mathrm{Re}\left[-\frac{\partial \dot{K}_i}{\partial a_k}\left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial \omega} - j\frac{\partial K_i}{\partial \omega}\right)^{-1}\right] a_{i0},$$

при $i > n$

$$\alpha_{ik} = Im\left[-\frac{\partial \dot{K}_{i-n+m}}{\partial a_k}\left(\frac{\partial \Psi_{i-n+m}}{\partial \omega} - j\frac{\partial K_{i-n+m}}{\partial \omega}\right)^{-1} + \right.$$
$$\left. + l_{i-n+m}\frac{\partial \dot{K}^l_{i-n+m}}{\partial a_k}\left(\frac{\partial \Psi^l_{i-n+m}}{\partial \omega} - j\frac{\partial K^l_{i-n+m}}{\partial \omega}\right)^{-1}\right]. \tag{4}$$

Полученный результат можно использовать и в случае, когда нелинейный и линейный элементы являются двухполюсниками. Уравнения (1) тогда имеют вид

$$-Z_л(p_i)\, G_{iН}(a, \varphi) = 1, \tag{5}$$

где $Z_л(p)$ — импеданс линейного звена, $G_{iН}(a, \varphi)$ — линеаризованная по $i$-той гармонике проводимость нелинейного звена. Вместо $\dot{K}_i$ в (4) подставляется левая часть (5).

## Периодические режимы

Если дисперсия в линии задержки генератора с запаздывающей обратной связью мала, то частоты генерации близки к кратности, что делает возможной самосинхронизацию мод. Эффект наиболее ярко выражен и просто описывается в отсутствие дисперсии, когда частоты генерации образуют ряд нечетных чисел. Рассмотрим устойчивость режимов, образованных двумя модами с отношением частот 1 : 3 в системе с идеальной линией задержки $\dot{U}_{вых}(t) = U_{вх}(t-\tau)$ в цепи обратной связи и характеристикой нелинейного усилителя $U_{вых} = -KU_{вх} + \frac{4\gamma}{3}U^3_{вх}$; $(K, \gamma > 0)$. Режим имеет вид $a_1 \sin\omega t + a_2 \times \sin(3\omega t + \varphi_2)$. Уравнения гармонического баланса для стационарного состояния:

$$(-K + \gamma a_1^2 + 2\gamma a_2^2 - \gamma a_1 a_2 e^{j\varphi_2})\, e^{-j\omega\tau} = 1,$$

$$\left(-K + 2\gamma a_1^2 + \gamma a_2^2 - \frac{\gamma a_1^3}{3a_2} e^{-j\varphi_2}\right) e^{-j3\omega\tau} = 1.$$

Система имеет 3 двухкомпонентных решения; во всех решениях $\omega=\pi/\tau(2N-1)$ $(N=1, 2...)$.

Первое решение: $a_{10}=1{,}068\ b_0$, $a_{20}=0{,}296\ b_0$, $\varphi_{20}=0$; где $b_0=\sqrt{(K-1)\gamma^{-1}}$.

Второе решение: $a_{10}=0{,}495\ b_0$, $a_{20}=0{,}750\ b_0$, $\varphi_{20}=0$.

Третье решение: $a_{10}=0{,}573\ b_0$, $a_{20}=0{,}454\ b_0$, $\varphi_{20}=\pi$.

Качественно эта совокупность решений совпадает с полученной в [5] при значительной дисперсии.

Первое решение представляет собой одночастотное движение с характерными для него отношением амплитуд третьей и основной гармоник и сдвигом фаз между ними. Его устойчивость определяется уравнением.

$$\begin{vmatrix} \frac{a_{10}}{\tau}\operatorname{Re}\frac{\partial \dot K_1}{\partial a_1}-\lambda & \frac{a_{10}}{\tau}\operatorname{Re}\frac{\partial \dot K_1}{\partial a_2} & \frac{a_{10}}{\tau}\operatorname{Re}\frac{\partial \dot K_1}{\partial \varphi_2} \\ \frac{a_{20}}{\tau}\operatorname{Re}\frac{\partial \dot K_2}{\partial a_1} & \frac{a_{20}}{\tau}\operatorname{Re}\frac{\partial \dot K_2}{\partial a_2}-\lambda & \frac{a_{20}}{\tau}\operatorname{Re}\frac{\partial \dot K_2}{\partial \varphi_2} \\ \frac{1}{\tau}Im\left(\frac{\partial \dot K_2}{\partial a_1}-3\frac{\partial \dot K_1}{\partial a_1}\right) & \frac{1}{\tau}Im\left(\frac{\partial \dot K_2}{\partial a_2}-3\frac{\partial \dot K_1}{\partial a_2}\right) & \frac{1}{\tau}Im\left(\frac{\partial \dot K_2}{\partial \varphi_2}-3\frac{\partial \dot K_1}{\partial \varphi_2}\right)-\lambda \end{vmatrix}=0, \qquad (6)$$

где производные взяты при $a_1=1{,}068\,b_0$, $a_2=0{,}296\,b_0$, $\varphi_2=0$. Перейдя к $\lambda'=\lambda\tau/(K-1)$ и $a_i'=a_{i0}/b_0$,

$$\begin{vmatrix} a_1'(-2a_1'+a_2')-\lambda' & a_1'(-4a_2'+a_1') & 0 \\ a_2'\left(-4a_1'+\frac{a_1'^2}{a_2'}\right) & a_2'\left(-2a_2'-\frac{a_1'^3}{3a_2'^2}\right)-\lambda' & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{a_1'^3}{3a_2'}-3a_1'a_2'\right)-\lambda' \end{vmatrix}=0. \qquad (7)$$

$$(\lambda'+2{,}45)\,[\lambda'^2+(1{,}96+1{,}65)\,\lambda'+(1{,}96\cdot 1{,}65-0{,}09^2)]=0.$$

Коэффициенты полиномов положительны, следовательно режим, как и следовало ожидать, устойчив. Устойчивость второго решения определяется тем же уравнением (7), подставляя в которое $a_1'=0{,}495$, $a_2'=0{,}750$, получаем

$$(\lambda'+1{,}16)\,[\lambda'^2+(0{,}12+1{,}18)\,\lambda'+(0{,}12\cdot 1{,}18-1{,}24^2)]=0;$$

режим неустойчив.

Характеристическое уравнение для третьего режима, получаемое подстановкой в (6) значений $a_1'=0{,}573$; $a_2'=0{,}454$; $\varphi_{20}=\pi$, имеет вид

$$(\lambda'-0{,}78-0{,}14)\,[\lambda'^2+\lambda'(0{,}92+0{,}27)+(0{,}92\cdot 0{,}27-1{,}37^2)]=0;$$

этот режим неустойчив не только по амплитуде, но и по фазе. Устойчивых двухмодовых режимов самосинхронизации в системе нет.

Рассмотрим устойчивость в той же системе трехмодовых режимов:

$$a_1 \sin \omega t + a_2 \sin (3\omega t + \varphi_2) + a_3 \sin (5\omega t + \varphi_3).$$

Уравнения гармонического баланса:

$$\left[-K + \gamma\left(a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 - a_1 a_2 e^{j\varphi_2} + \frac{a_2^2 a_3}{a_1} e^{j(2\varphi_2-\varphi_3)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2a_2 a_3 e^{j(\varphi_3-\varphi_2)}\right)\right] e^{-j\omega\tau} = 1,$$

$$\left[-K + \gamma\left(2a_1^2 + a_2^2 + 2a_3^2 - \frac{a_1^3}{3a_2} e^{-j\varphi_2} - \frac{a_1^2 a_3}{a_2} e^{j(\varphi_3-\varphi_2)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2a_1 a_3 e^{j(\varphi_3-2\varphi_2)}\right)\right] e^{-j3\omega\tau} = 1,$$

$$\left[-K + \gamma\left(2a_1^2 + 2a_2^2 + a_3^2 - \frac{a_1^2 a_2}{a_3} e^{j(\varphi_2-\varphi_3)} + \frac{a_2^2 a_1}{a_3} e^{j(2\varphi_2-\varphi_3)}\right)\right] e^{-j5\omega\tau} = 1.$$

Решение, соответствующее одночастотному движению в этом случае, естественно, также имеется и является устойчивым. Подставляя его параметры

$$a_1' = 1{,}08; \quad a_2' = 0{,}33; \quad a_3' = 0{,}17; \quad \varphi_{20} = 0; \quad \varphi_{30} = 0; \quad \omega_0 = \frac{\pi}{\tau}(2N-1)$$

в уравнение (3) (ранг матрицы равен $2n-m=2\cdot 3-1=5$), получаем

$$(\lambda'^3 + 5{,}67\lambda'^2 + 10{,}9\lambda' + 6{,}50)(\lambda'^2 + 3{,}99\lambda' + 3{,}91) = 0.$$

Так как все коэффициенты полиномов положительны, и в первом полиноме $c_1 c_2 = 10{,}9\cdot 5{,}67 > c_0 c_3 = 6{,}50\cdot 1$, то режим устойчив.

Решение, соответствующее режиму самосинхронизации:

$$a_1' = a_3' = 0{,}522; \quad a_2' = 0{,}761; \quad \varphi_{20} = \pi; \quad \varphi_{30} = \pi; \quad \omega_0 = \frac{\pi}{\tau}(2N-1).$$

Характеристическое уравнение:

$$(\lambda'^3 + 4{,}33\lambda'^2 + 5{,}60\lambda' + 2{,}97)(\lambda'^2 + 3{,}17\lambda' + 2{,}14) = 0.$$

$4{,}33\cdot 5{,}60 > 2{,}97\cdot 1$ — режим устойчив. Таким образом, минимальное число мод, способных образовать в системе устойчивый многочастотный режим, равно трем.

## Непериодические колебания

Рассмотрим устойчивость режима $a_1 \sin\omega_1 t + \ldots + a_n \sin\omega_n t$ с частотами, далекими от соизмеримости, в генераторе с произвольной цепью обратной связи и нелинейной характеристикой усилителя $U_{\text{вых}} = -KU_{\text{вх}} + \frac{4\gamma}{3} U_{\text{вх}}^3$. После проведения гармонической линеаризации из системы уравнений

$$\left(-K + \gamma a_i^2 + 2\gamma \sum_{k\neq i}^{n} a_k^2\right) K_л(\omega_i)\, e^{j\Psi_л(\omega_i)} = 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

находятся стационарные значения $a$ и $\omega$. Вследствие произвольности линейного звена стационарные амплитуды, в отличие от аналогичного случая, рассмотренного в [6], вообще говоря, различны. Из (4) получаем

$$\alpha_{ik} = a_{i0}\operatorname{Re}\left[-\gamma a_{ko}(2-\delta_{ik})\, K_л(\omega_{i0})\, e^{j\Psi_л(\omega_{i0})}\left(\frac{\partial\Psi i}{\partial\omega} - j\frac{\partial K i}{\partial\omega}\right)^{-1}\right] =$$

$$= \gamma a_{i0}K_л(\omega_{i0})\frac{\partial\Psi i}{\partial\omega}\left[\left(\frac{\partial\Psi i}{\partial\omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial K_i}{\partial\omega}\right)^2\right](2-\delta_{ik})\,a_{k0} = C_i(2-\delta_{ik})\,a_{k0};$$

где $\delta_{ik}$ — символ Кронекера; $C_i<0$.

Характеристическое уравнение:

$$(-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} C_i a_{i0} + (-\lambda)^{n-2}\sum_{i,j>i}^{n}(\alpha_{ii}\alpha_{jj} - \alpha_{ij}\alpha_{ji}) + \ldots =$$

$$= (-1)^n\left[\lambda^n + \lambda^{n-1}\sum_{i=1}^{n}(-C_i)\,a_{i0} + \lambda^{n-2}\sum_{i,j>i}^{n} C_i C_j a_{i0}a_{j0}(1\cdot 1 - 2\cdot 2) + \ldots\right] =$$

$$= 0.$$

Вид коэффициента при $\lambda^{n-2}$ следует из того, что произведение $(-\lambda)^{n-2}\alpha_{ii}\alpha_{jj}$ не имеет инверсий, а произведение $(-\lambda)^{n-2}\alpha_{ij}\alpha_{ji}$ имеет $2p+1$ инверсию, где $p=j-i-1$ — число промежуточных между $i$-той и $j$-той строк.

Коэффициенты при $\lambda^n$ и $\lambda^{n-2}$ имеют разные знаки, следовательно, режим неустойчив; в том числе в интересующем нас случае, когда цепь обратной связи представляет собой линию задержки, а число генерируемых мод равно двум.

Если высшие гармоники одной или обеих мод находятся в полосе пропускания системы, их влияние желательно учесть. Рассмотрим устойчивость режима, образованного двумя асинхронными модами с учетом третьей гармоники одной моды, а затем и обеих мод. Величину запаздывания как фазового $\psi_л(\omega_i)/\omega_i$, так и группового $\frac{\partial\Psi_л}{\partial\omega}(\omega_i)$ считаем для данного основного тона $a_i$ и его третьей гармоники $a_k$ одной и той же, равной $\tau_i$. Такое допущение, не снижая влияния третьей гармоники, имеющей при этом оптимальные фазовые условия регенерации, существенно упрощает расчет. $K_л(\omega)$ в области частот рассматриваемых колебаний считаем равным 1, аппроксимацию нелинейности усилителя — прежней.

Первый режим ищем в виде

$$a_1\sin\omega_1 t + a_2\sin\omega_2 t + a_3\sin(3\omega_1 t + \varphi_3).$$

Уравнения гармонического баланса:

$$[-K + \gamma(a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 - a_1 a_3 e^{j\varphi_3})]\, e^{-j\omega_1\tau_1} = 1,$$

$$[-K + \gamma(2a_1^2 + a_2^2 + 2a_3^2)]\, e^{-j\omega_2\tau_2} = 1,$$

$$\left[-K + \gamma\left(2a_1^2 + 2a_2^2 + a_3^2 - \frac{a_1^3}{3a_3}e^{-j\varphi_3}\right)\right]e^{-j3\omega_1\tau_1} = 1.$$

Нас интересует решение с сочетанием $\dot{a}_1$ и $\dot{a}_3$, характерным для одночастотного движения. Параметры этого решения:

$$a_1' = 0{,}540,\quad a_2' = 0{,}610,\quad a_3' = 0{,}149,\quad \varphi_{30} = 0,\quad \omega_{10} = \frac{\pi}{\tau_1}(2N_1 - 1),\ \omega_{20} = \frac{\pi}{\tau_2}(2N_2 - 1).$$

Уравнение, определяющее устойчивость:

$$\begin{vmatrix} -2a_1'^2 + a_1' a_3' - \lambda' & -4a_1' a_2' & -4a_1' a_3' + a_1'^2 & 0 \\ -4a_1' a_2' \frac{\tau_1}{\tau_2} & -2a_2'^2 \frac{\tau_1}{\tau_2} - \lambda' & -4a_2' a_3' \frac{\tau_1}{\tau_2} & 0 \\ -4a_1' a_3' + a_1'^2 & -4a_2' a_3' & -\left(2a_3'^2 + \frac{a_1'^3}{3a_3'}\right) - \lambda' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{a_1'^3}{3a_3'} + 3a_1' a_3'\right) - \lambda' \end{vmatrix} = 0;$$

здесь $\lambda' = \lambda\tau_1/(K-1)$.

$$(\lambda' + 0{,}593)\left[\lambda'^3 + A\lambda'^2 + B\lambda' + \frac{\tau_1}{\tau_2}(0{,}227 - 0{,}538)\right] = 0. \qquad (8)$$

$A$ и $B$ зависят от $\tau_1/\tau_2$, но свободный член второго полинома независимо от $\tau_1$ и $\tau_2$ отрицателен. Режим неустойчив.

Отметим, что при $\Psi_л(\omega_2)/\omega_2 \neq \frac{\partial \Psi_л}{\partial \omega}(\omega_2)$ уравнение (8) остается в силе, причем под $\tau_2$ в нем подразумевается $\frac{\partial \Psi_л}{\partial \omega}(\omega_2)$.

Двухмодовый режим с учетом третьих гармоник обеих мод ищем в виде

$$a_1 \sin\omega_1 t + a_2 \sin\omega_2 t + a_3 \sin(3\omega_1 t + \varphi_3) + a_4 \sin(3\omega_2 t + \varphi_4).$$

Решение, представляющее собой сумму двух одночастотных движений, имеет параметры:

$$a_1' = a_2' = 0{,}581,\quad a_3' = a_4' = 0{,}092,\quad \varphi_{30} = 0,\quad \varphi_{40} = 0,$$

$$\varphi_{10} = \frac{\pi}{\tau_1}(2N_1 - 1),\quad \omega_{20} = \frac{\pi}{\tau^2}(2N_2 - 1).$$

Характеристическое уравнение ($\lambda' = \lambda\tau_1/(K-1)$; ранг матрицы равен $2\cdot 4 - 2 = 6$):

$$(\lambda'^2 + A\lambda' + B)\left[\lambda'^4 + C\lambda'^3 + D\lambda'^2 + \left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) \times \frac{\tau_1}{\tau_2}(0{,}282 - 1{,}151)\lambda' + E\right] = 0.$$

Коэффициент при $\lambda'$ в последнем полиноме отрицателен при любых $\tau_1$ и $\tau_2$. Таким образом, режим, образованный двумя асинхронными модами в системе с монотонно убывающей крутизной нелинейного усилителя, с учетом третьих гармоник остается также неустойчивым.

Рассмотренные ранее взаимодействия (синхронное при отсутствии расстройки и асинхронное) в резонансной высокодобротной системе привели бы к генерации точно на резонансных частотах. При этом

$\left.\frac{\partial K_i}{\partial \omega}\right|_{\omega_{i0}} = 0$ и элементы матрицы (3) схожи с элементами для физически противоположного случая линии задержки в качестве цепи обратной связи. Следовательно, процессы, определяющие устойчивость данных режимов в генераторах с запаздывающей обратной связью, не имеют принципиальных отличий от процессов в резонансной системе с соответствующим набором резонансных частот и добротностей.

## Обратная аппроксимация нелинейности

Аппроксимация нелинейности усилителя кубической параболой обеспечивает простоту расчетов, но не всегда хорошо соответствует характеристикам реальных устройств. Обоим требованиям удовлетворяет обратная аппроксимация

$$U_{\text{вх}} = -K' U_{\text{вых}} - \frac{4\gamma'}{3} U^3_{\text{вых}}.$$

Отношение выходной амплитуды $\dot{A}_i$ к входной $\dot{a}_i$ дается в этом случае «обратным коэффициентом усиления» $\dot{K}'_{iH}(A, \Phi)$, аргументами которого являются выходные амплитуды $A_i$ и сдвиги фаз между гармониками на выходе $\Phi_i$:

$$\frac{\dot{A}_i}{\dot{a}_i} = \frac{1}{\dot{K}'_{iH}(A, \Phi)}.$$

Уравнения гармонического баланса:

$$\dot{K}_i(p_i, A, \Phi) = \frac{\dot{K}_{\text{л}}(p_i)}{\dot{K}'_{iH}(A, \Phi)} = 1.$$

Уравнения первого приближения для $p_i$:

$$p_i - j\,\omega_{i0} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial A_k}\xi'_k + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial \Phi_k}\eta'_k,$$

где

$$\xi'_k = A_k - A_{k0}; \quad \eta'_k = \Phi_k - \Phi_{k0}.$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial A_k} = -\frac{\dfrac{\partial \dot{K}_i}{\partial A_k}}{\dfrac{\partial \dot{K}_i}{\partial p_i}} = \frac{\dfrac{\dot{K}_{\text{л}}(j\,\omega_{i0})}{\dot{K}'^2_{iH}(A_0, \Phi_0)} \cdot \dfrac{\partial \dot{K}'_{iH}}{\partial A_k}}{\dfrac{1}{\dot{K}'_{iH}(A_0, \Phi_0)} \cdot \dfrac{\partial \dot{K}_{\text{л}}}{\partial p_i}} = \frac{\dfrac{\partial \dot{K}'_{iH}}{\partial A_k}}{\dfrac{\partial \dot{K}_{\text{л}}}{\partial p_i}};$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \Phi_k} = \frac{\dfrac{\partial \dot{K}'_{iH}}{\partial \Phi_k}}{\dfrac{\partial \dot{K}_{\text{л}}}{\partial p_i}}.$$

Во всех рассмотренных выше задачах, кроме задачи с произвольной цепью обратной связи,

$$\dot{K}_{iH}(a_0, \varphi_0) = \dot{K}_{\text{л}}(j\,\omega_{i0}) = -1,$$

поэтому

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} = -\frac{\left(\frac{\partial \dot{K}_i}{\partial a_k}\right)}{\left(\frac{\partial \dot{K}_i}{\partial p_i}\right)} = -\frac{\left(\frac{\partial \dot{K}_{iH}}{\partial a_k}\right)}{\left(\frac{\partial \dot{K}_л}{\partial p_i}\right)}; \quad \frac{\partial p_i}{\partial \varphi_k} = -\frac{\left(\frac{\partial \dot{K}_{iH}}{\partial \varphi_k}\right)}{\left(\frac{\partial \dot{K}_л}{\partial p_i}\right)}.$$

Вид же функции $\frac{\partial \dot{K}_{iH}(a, \varphi)}{\partial a_k, \varphi_k}$ в этих задачах совпадает с видом $\left(-\frac{\partial \dot{K}'_{iH}(A; \Phi)}{\partial A_k, \Phi_k}\right)$, и безразмерные стационарные амплитуды $A'_i = A_{i0}/B_0$ (где $B_0 = \sqrt{(1 - K')/\gamma'}$) и сдвиги фаз $\Phi_{i0}$ имеют те же значения, что и $a'_i$ и $\varphi_{i0}$ в задачах с прямой аппроксимацией. Следовательно, характеристические уравнения не меняются. В задаче с произвольной цепью обратной связи изменятся $C_i$ и $A'_i$; неустойчивость при этом сохраняется.

Таким образом, полученные результаты справедливы и при обратной аппроксимации нелинейности кубической параболой.

К глубокому сожалению, работа была завершена лишь одним из авторов.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Гольдфарб Л. С. — В кн.: Метод Гольдфарба в теории регулирования. М., 1962.
2. Попов Е. П. — «Изв. АН СССР сер. физич.», № 9, 3, 1956.
3. Попов Е. П. Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. М., 1973.
4. Кобзарев Ю. Б. — ЖТФ, 3, 318, 1933.
5. Азьян Ю. М., Снигирев О. В., Мкртумов А. С. — «Вестн. Моск. ун-та. Сер. III. Физ., астрон.», 13, № 1, 99, 1972.
6. Уткин Г. М. — «Радиотехника и электроника», 4, № 12, 1993, 1959.



Поступила в редакцию
9.12 1975 г.



Кафедра
физики колебаний