

Л. А. ШЕНЯВСКИЙ

ВОЛНЫ В БЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Исследованы дисперсионные кривые и коэффициент распределения упругих волн, распространяющихся в бесконечной цилиндрической оболочке.

Теоретическое исследование колебаний оболочек сводится к анализу систем уравнений в частных производных со сложными граничными условиями. Аналитические решения таких задач известны лишь для некоторых частных случаев: для изотропных пластин и конечных цилиндрических оболочек при простейших граничных условиях. При исследовании колебаний оболочек, погруженных в жидкость, задача еще более усложняется. Известные приближенные аналитические решения этих задач даже в простейших случаях с трудом поддаются анализу [1]. Качественное представление о колебаниях оболочки, имеющей форму, близкую к длинному цилиндру, можно получить из анализа решения задачи о распространении волны в бесконечной цилиндрической оболочке. Обзор результатов расчетов на ЭВМ дисперсионных соотношений для различных уравнений бесконечной цилиндрической оболочки приведен в [2].

Особый интерес представляет анализ форм колебаний и дисперсионных кривых при исследовании распространения вибраций и возможностей их демпфирования.

§ 1. Уравнения колебаний бесконечной цилиндрической оболочки

В теории тонких оболочек задачи трехмерных деформаций объемов сводятся к двумерному случаю деформации срединной поверхности [3]. В зависимости от способа пересчета объемных усилий и деформаций к усилиям и деформациям элемента срединной поверхности известны несколько вариантов уравнений равновесия цилиндрической оболочки. Из этих вариантов нами выбрана достаточно простая система, правильно описывающая известные предельные случаи.

Положение элемента срединной поверхности будем задавать цилиндрическими координатами z, φ, x (рис. 1). Перемещение точек поверхности описывается вектором $\mathbf{U} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$, где \mathbf{r}_1 — радиус-вектор смещен-

ной точки срединной поверхности, положение которой до деформации описывалось радиусом-вектором r_0 . Соответствующие цилиндрическим координатам компоненты вектора \mathbf{U} обозначим w , v и u . Положительному направлению оси z будут соответствовать отрицательные значения w . В этих переменных уравнения равновесия цилиндрической оболочки согласно [3] имеют вид

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\sigma}{2R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) u + \frac{1+\sigma}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\sigma}{R} \frac{\partial w}{\partial x} = - \frac{1-\sigma^2}{Eh} X, \quad (1) \\ & \frac{1+\sigma}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + \left\{ \frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \right. \\ & \quad \left. + a^2 \left[2(1-\sigma) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \right\} v + \\ & + \left\{ - \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + a^2 \left[(2-\sigma) \frac{\partial^3}{\partial \varphi \partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} \right] \right\} w = - \frac{1-\sigma^2}{Eh} Y, \\ & - \frac{\sigma}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \left\{ - \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + a^2 \left[(2-\sigma) \frac{\partial^3}{\partial \varphi \partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} \right] \right\} v + \\ & + \left\{ \frac{1}{R^2} + a^2 R^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 \right\} w = \frac{1-\sigma^2}{Eh} Z. \end{aligned}$$

Здесь R — радиус цилиндра, h — толщина оболочки, $a^2 = \frac{h^2}{12R^2}$,

σ — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, X , Y и Z — поверхностные плотности внешних сил, направленных по ортам системы координат x , φ и z .

Чтобы получить уравнения колебаний оболочки, соприкасающейся одной стороной с невязкой жидкостью, нужно в систему (1) подставить

$$X = -\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad Y = -\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$Z = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p_{ж},$$

где $p_{ж}$ — давление, оказываемое жидкостью на оболочку. Давление связано с потенциалом скорости движения жидкости $\Phi(z, \varphi, x, t)$ соотношением

$$p_{ж} = \rho_{ж} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=R} \quad (3)$$

$$(\mathbf{V} = -\text{grad } \Phi).$$

Здесь $\rho_{ж}$ — плотность жидкости, а \mathbf{V} — скорость жидкости. Потенциал удовлетворяет волновому уравнению и известному [4] граничному условию

$$\Delta \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=R} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (4)$$

где c — скорость звука в жидкости.

Уравнения колебаний пластины, соприкасающейся одной стороной с жидкостью, можно получить из (1), заменив переменную φ на $y=R\varphi$ и перейдя к пределу при $R \rightarrow \infty$. В выражении для давления (3) и в граничном условии (4) значения $z=R$ должны быть заменены на $z=0$.

Проделав необходимые вычисления, легко убедиться, что система (1) в предельном случае ($R \rightarrow \infty$) распадается на три независимых уравнения, описывающих продольные, поперечные и изгибные колебания пластины. Подставив в уравнения для изгибных колебаний и для потенциала решения в виде

$$\omega = \omega_0 e^{i(\omega t - k_x x)}, \quad \Phi = \Phi_0 e^{-kx} e^{i(\omega t - k_x x)} \quad (5)$$

и исключив Φ_0 и k , можно получить дисперсионное уравнение для изгибных волн, распространяющихся в пластине:

$$\frac{Eh^2}{12(1-\sigma^2)} k_x^4 - \omega^2 \left(\rho + \frac{\rho_{ж.}}{h \sqrt{k_x^2 - \omega^2/c^2}} \right) = 0. \quad (6)$$

Из (6) вытекает, что в пластине, соприкасающейся с жидкостью, могут распространяться незатухающие волны (k_x — действительная величина), если $k_x > \omega/c$, т. е. при $V < c$, где V — скорость распространения волны в пластине.

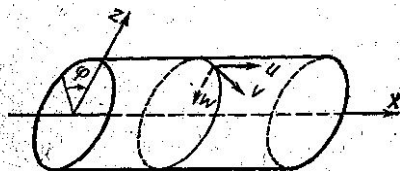


Рис. 1

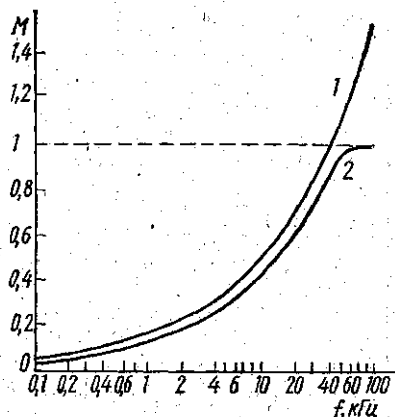


Рис. 2

На рис. 2 приведены дисперсионные кривые для волн, распространяющихся в дюралюминиевой пластине. По оси ординат отложена величина $M = V/c$, а по оси абсцисс, частота f (кГц). Для расчетов были взяты следующие численные значения: $h = 5$ мм, $E = 7,1 \cdot 10^{11}$ дн/см², $\sigma = 0,3$, $\rho = 2,8$ и $\rho_{ж.} = 1$ г/см³; $c = 1400$ м/с. Кривая 1 соответствует волнам в свободной пластине, кривая 2 рассчитана на ЭЦВМ из соотношения (6).

§ 2. Волны в свободной цилиндрической оболочке

Подставив в систему (1) соотношения (2) и приняв $p_{ж.} = 0$, получим систему уравнений, описывающую колебания свободной цилиндрической оболочки. Будем искать решение в виде

$$(u, v, w) = (u_0, v_0, w_0) e^{i(\omega t + k_x x + n\varphi)}. \quad (7)$$

Такое решение представляет собой волну, распространяющуюся по правой винтовой линии, причем ось линии направлена против оси x . Из периодичности решения по φ следует, что n должно быть целым числом. Подставив (7) в (1), получим

$$\begin{aligned}
 & \left(k_x^2 + \frac{1-\sigma}{2R^2} n^2 - \rho\omega^2 \frac{1-\sigma^2}{E} \right) u_0 + \frac{1+\sigma}{2R} nk_x v_0 + i \frac{\sigma}{R} k_x w_0 = 0, \\
 & \frac{1+\sigma}{2R} nk_x u_0 + \left\{ \frac{1-\sigma}{2} k_x^2 + \frac{n^2}{R^2} + a^2 \left[2(1-\sigma) k_x^2 + \frac{n^2}{R^2} \right] - \right. \\
 & \left. - \rho\omega^2 \frac{1-\sigma^2}{E} \right\} v_0 + i \left\{ \frac{n}{R^2} + a^2 \left[(2-\sigma) nk_x^2 + \frac{n^3}{R^2} \right] \right\} w_0 = 0, \quad (8) \\
 & i \frac{\sigma}{R} k_x u_0 + i \left\{ \frac{n}{R^2} + a^2 \left[(2-\sigma) nk_x^2 + \frac{n^3}{R^2} \right] \right\} v_0 - \\
 & - \left[\frac{1}{R^2} + a^2 R^2 \left(k_x^2 + \frac{n^2}{R^2} \right)^2 - \rho\omega^2 \frac{1-\sigma^2}{E} \right] w_0 = 0.
 \end{aligned}$$

Чтобы перейти к системе уравнений с действительными коэффициентами, введем новую переменную $\bar{w}_0 = iw_0$. Поскольку система (8) является однородной, необходимо, чтобы ее определитель равнялся нулю. Это условие приводит к дисперсионному соотношению для волн в свободной цилиндрической оболочке

$$\left| \begin{array}{ccc}
 k_x^2 + \frac{1-\sigma}{2R^2} n^2 - \rho\omega^2 \frac{1-\sigma^2}{E}, & \frac{1+\sigma}{2R} nk_x, & \frac{\sigma}{R} k_x \\
 \frac{1+\sigma}{2R} nk_x, & \frac{1-\sigma}{2} (1+4a^2) k_x^2 + \frac{n^2}{R^2} (1+a^2) - \rho\omega^2 \frac{1-\sigma^2}{E}, & \\
 & \frac{n}{R^2} (1+a^2 n^2) + a^2 (2-\sigma) nk_x^2 & \\
 \frac{\sigma}{R} k_x, & \frac{n}{R^2} (1+a^2 n^2) + a^2 (2-\sigma) nk_x^2, & \\
 \frac{1}{R^2} + R^2 a^2 \left(k_x^2 + \frac{n^2}{R^2} \right)^2 - \rho\omega^2 \frac{1-\sigma^2}{E} & &
 \end{array} \right| = 0. \quad (9)$$

При фиксированном k_x это выражение представляет собой кубическое уравнение относительно ω^2 . Так как матрица определителя (9) симметрична, то ее собственные значения $\eta_i = \rho\omega_i^2 \frac{1-\sigma^2}{E}$ действительны, а соответствующие им собственные векторы $(u_{0i}, v_{0i}, \bar{w}_{0i})$ — ортогональны.

Уравнение (9) можно представить в виде

$$\eta^3 - A_2 \eta^2 + A_1 \eta - A_0 = 0. \quad (10)$$

При этом оказывается, что коэффициенты A_i зависят только от четных степеней k_x и n и что $A_i \geq 0$. Это означает, что направление оси и ориентации винтовой линии, по которой распространяется волна, не существенны, и что для каждой фиксированной длины волны существуют, вообще говоря, три волны, распространяющиеся с различными скоростями. Таким образом, дисперсионная кривая (кривая зависимости V от f) должна состоять из трех ветвей.

Если при $k_x \rightarrow 0$ найдутся решения уравнения (9), не равные нулю, то соответствующие частоты f_{ac} будут вертикальными асимптотами дисперсионной кривой. Переходя к пределу при $k_x \rightarrow 0$ в соотношениях (8) и (9); получим, что одна из волн будет содержать только компонент u . Для этой волны

$$f_{acu} = \frac{n}{2\pi R} \sqrt{\frac{E}{2\rho(1-\sigma)}} \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

(Случай $n=0$ требует специального рассмотрения.) Две другие волны в пределе останутся связанными. Их вертикальные асимптоты выражаются следующим образом:

$$f_{ac v, w} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\sigma^2)} \frac{(1+n^2)(1+a^2n^2)}{2}} \times \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - 4a^2 \left[\frac{n(n^2-1)}{(1+n^2)(1+a^2n^2)} \right]^2} \right\}. \quad (12)$$

Можно показать, что подкоренное выражение в формуле (12) всегда больше нуля и, следовательно, при всяком n имеются два значения $f_{ac v, w}$. Если $n=0$ или $n=1$, то одно из этих значений равно нулю. Эти случаи необходимо исследовать особо.

Конечные значения V при $k_x \rightarrow \infty$ на графике $V(f)$ соответствуют горизонтальным асимптотам. В предельном случае, как это следует из (8) и (9), у одной из волн остается только компонент v . Предельное значение скорости этой волны равно

$$V_{ac v} = \sqrt{\frac{E(1+4a^2)}{2\rho(1+\sigma)}}. \quad (13)$$

У другой волны в пределе останется отличный от нуля лишь компонент u . При этом скорость этой волны стремится к

$$V_{ac u} = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\sigma^2)}}. \quad (14)$$

Из ортогональности собственных векторов вытекает, что в волне, не имеющей горизонтальной асимптоты, при $k_x \rightarrow \infty$ сохраняется только компонент w .

При $n=0$ второе уравнение системы (8) оказывается независимым. Отсюда следует, что в этом случае имеется волна только с v -составляющей. Скорость этой волны постоянна и определяется формулой (13). Одна из оставшихся ветвей дисперсионной кривой при $k_x \rightarrow 0$ стремится к предельному значению

$$V_{0u} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (15)$$

(при этом $f \rightarrow 0$).

Другая ветвь имеет вертикальную асимптоту

$$f_{0w} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\sigma^2)}}, \quad (16)$$

при приближении к которой слева в соответствующей волне остается только w -составляющая.

Для $n=1$, как показывает анализ коэффициентов уравнения (10), существует ветвь дисперсионной кривой, стремящейся при $k_x \rightarrow 0$ к точке $V=0$, $f=0$. Соответствующий собственный вектор, как это следует из (8), стремится в $(0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Можно показать, что такое движение представляет собой «балочные» колебания оболочки, т. е. в любой момент времени окружность сечения смещается как единое целое.

Для цилиндрической оболочки с $R=17,5$ см и теми же параметрами, что и у рассмотренной ранее пластины, были рассчитаны на

ЭЦВМ дисперсионные кривые и коэффициенты распределения. Результаты расчетов в виде графиков зависимости $M=V/c$ от частоты приведены на рис. 3. В скобках около кривых показаны преобладающие компоненты в коэффициентах распределения. С увеличением частоты ветви дисперсионных кривых с различными n сливаются, образуя три ветви. У каждой из этих ветвей преобладающим в коэффициенте распределения является какой-либо один компонент: u , v или w . Как видно из графиков, при достаточно высоких частотах дисперсионные кривые цилиндрической оболочки совпадают с дисперсионными кривыми пластины. Для волн с преобладающим компонентом w дисперсионные кривые оболочки и пластины практически не различимы выше частоты, соответствующей минимуму M . Бесконечные значения скоростей на вертикальных асимптотах отвечают деформациям сечений, независящим от координаты x . Если кривые пересчитать в переменных M_e и f , где $M_e=V_e/c$, а V_e — скорость волны по направлению ее распространения, то у всех дисперсионных кривых останется лишь одна вертикальная асимптота, соответствующая радиальному резонансу цилиндрической оболочки ($n=0$).

§ 3. Волны в полой цилиндрической оболочке, погруженной в жидкость

Уравнения для волн, распространяющихся в цилиндрической оболочке, которая соприкасается внешней стороной с жидкостью, можно вывести из (1) и (2). Для потенциала в цилиндрической системе координат имеет место уравнение

$$\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}. \quad (17)$$

После подстановки в (17) решения

$$\Phi = \Phi_0(z) e^{i(\omega t + k_x x + n \varphi)} \quad (18)$$

для $\Phi_0(z)$ получим

$$\frac{d^2 \Phi_0}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d \Phi_0}{dz} - \left(k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{n^2}{z^2} \right) \Phi_0 = 0. \quad (19)$$

Если $k_x < \frac{\omega}{c}$ ($V > c$), то уравнению (19) удовлетворяет функция Ханкеля, описывающая, уходящую в бесконечность цилиндрическую волну. Эта волна уносит энергию, и поэтому в оболочке не могут распространяться незатухающие волны. Такие волны могут существовать лишь при $k_x > \frac{\omega}{c}$ ($V < c$). В этом случае решение уравнения (19), ограниченное на бесконечности, выражается через функции Макдональда K_n :

$$\Phi_0(z) = BK_n(\kappa z), \quad (20)$$

где $\kappa = \sqrt{k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$.

Система уравнений для колебаний цилиндрической оболочки, соприкасающейся с жидкостью, аналогична системе (8), если в последнем уравнении системы вместо ρ записать

$$\rho_n = \rho + \rho_{np} = \rho - \frac{\rho_{ж}}{\kappa h} \frac{K_n(\xi)}{dK_n(\xi)} \Big|_{\xi=\kappa R}$$

Используя известное [5] соотношение для функций Макдональда $\frac{dK_n(\xi)}{d\xi} = \frac{n}{\xi} K_n(\xi) - K_{n+1}(\xi)$, можно представить плотность присоединенной массы ρ_{np} в виде

$$\rho_{np} = \frac{\rho_{ж} R}{h} \frac{1}{\left[\frac{K_{n+1}(\xi)}{K_n(\xi)} - n \right]_{\xi=\kappa R}} \quad (21)$$

Заменив для малых значений аргумента $K_n(\xi)$ и $K_{n+1}(\xi)$ рядами [5], легко показать, что

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \rho_{np} = \frac{\rho_{ж} R}{nh} \quad (22)$$

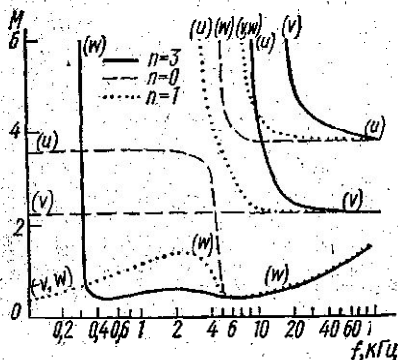


Рис. 3

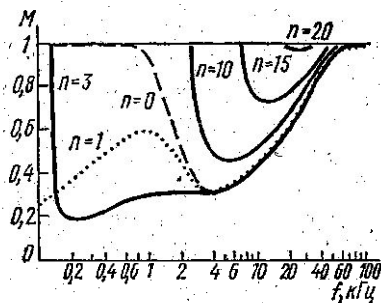


Рис. 4

Отсюда видно, что если $n=0$, то при $\kappa \rightarrow 0$ плотность присоединенной массы ρ_{np} стремится к бесконечности.

Для цилиндрической оболочки, соприкасающейся внешней стороной с жидкостью на ЭЦВМ БЭСМ-4, были рассчитаны дисперсионные кривые и коэффициенты распределения. При расчетах использовались численные параметры, приведенные в § 1 и 2. На рис. 4 показаны некоторые характерные дисперсионные кривые.

При $n=0$ и $f \rightarrow 0$ соответствующая кривая стремится к $M=1$ и преобладающим составляющим в коэффициенте распределения становится компонент u . Если $f \rightarrow \infty$, то M также стремится к единице, но преобладающим становится компонент w . Следует отметить, что в этих случаях $\kappa \rightarrow 0$. Величина $1/\kappa$ характеризует глубину проникновения волны в жидкость в соответствии с (20). Поэтому естественно ожидать, что, чем меньше κ , тем большая часть энергии распространяется по жидкости. Для низкочастотной области кривой $n=0$ характерны большие значения глубины проникновения. Так, $1/\kappa$ достигает минимума при частоте ≈ 26 кгЦ, равного приблизительно $0,85 R$ ($R=17,5$ см). На частотах 3 и 60 кгЦ $1/\kappa$ возрастает до $2 R$, а на частотах 1,7 и 106 кгЦ—

до $10 R$. На частоте ≈ 630 Гц $1/\kappa=100 R$, а при $f \approx 300$ Гц $1/\kappa=10^9 R$.

Для кривой, описывающей волну с $n=1$, при $f \rightarrow 0$ $M \rightarrow 0$ соответствующий коэффициент распределения стремится к $(0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. В этом случае имеют место «балочные» колебания оболочки (см. § 2). При увеличении частоты преобладающей становится составляющая ω . На частоте $\approx 150,4$ кГц κ обращается в нуль, а при более высоких частотах незатухающая волна с $n=1$ не может распространяться по оболочке.

При $n=2$ значению $\kappa=0$ отвечают частоты 43 и 110,2 кГц. Частоте 43 Гц соответствует коэффициент распределения $(0,008; -0,447; 0,894)$. С увеличением частоты составляющая ω сначала незначительно уменьшается (до 0,884), а затем возрастает. Дисперсионная кривая определена при частотах, лежащих между $f_{\text{н}}=43$ Гц и $f_{\text{в}}=110,2$ кГц.

Вне интервала $(f_{\text{н}}, f_{\text{в}})$ незатухающие волны не распространяются по оболочке. Все остальные волны, распространяющиеся по оболочке, имеют преобладающую составляющую ω . С увеличением n интервал $(f_{\text{н}}, f_{\text{в}})$ сокращается и незатухающие волны с $n > 20$ по оболочке с данными параметрами не распространяются вовсе.

Кривая зависимости $M=M(f)$ в случае $n=0$ имеет около частоты 4 кГц минимум (рис. 4). При частотах выше этого минимума дисперсионная кривая оболочки сливается с дисперсионной кривой пластины, соприкасающейся с жидкостью (см. рис. 2). Если $n \leq 7$, то существует область частот, где соответствующие дисперсионные кривые совпадают с кривой для случая $n=0$ и, следовательно, с дисперсионной кривой пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек. Киев, 1964.
2. Greenspan I. E. JASA, 1960, 32, N 5.
3. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., 1953.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., 1954.
5. Грандштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М., 1963.

Поступила в редакцию
3.6 1974 г.

Кафедра
общей физики для мехмата